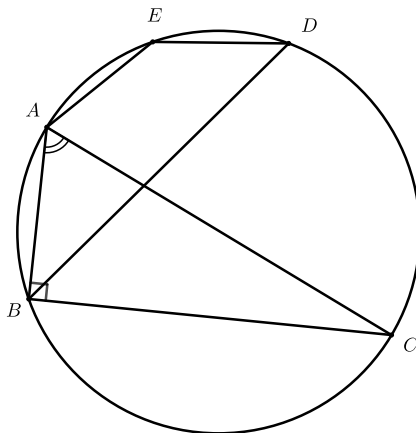


آزمون مرحله اول چهل و دومین المپیاد ریاضی

۴. در شکل زیر می‌دانیم زاویه $\angle ABC$ برابر با 90° درجه است و $BC = BD$ و $AB = AE = ED$ دو برابر زاویه $\angle BAC$ چند درجه است؟



۱۵۵° (۵)

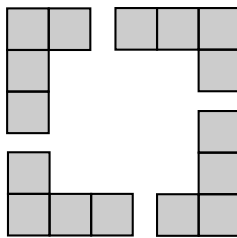
۱۴۵° (۴)

۱۳۵° (۳)

۱۳۰° (۲)

۱۲۵° (۱)

۵. در یک جدول 10×3 حداکثر چند قطعه مانند قطعات نشان داده شده در شکل زیر را که هرکدام از ۴ مربع به ضلع واحد تشکیل شده‌اند می‌توان قرار داد به طوری که با هم به جز در مرز، همپوشانی نداشته باشند؟ (قطعات بدون چرخش یا قرینه کردن گذاشته می‌شوند.)



۶. اعداد حقیقی مثبت x, y, z در معادله زیر صدق کرده‌اند. عدد $x + y - 2z$ چند مقدار متفاوت می‌تواند به خود بگیرد؟ (منظور از $[x]$ ، جزء صحیح x یعنی بزرگترین عدد صحیحی که از x بیشتر نباشد و منظور از $\{x\}$ جزء اعشاری x یعنی $x - [x]$ می‌باشد.)

$$[x] + \{y\}^2 = [y] + \{z\}^2 = [z] + \{x\}^2$$

۷. تونلی به شکل نیم‌دایره احداث شده است. این تونل سه خط عبور برای عبور ماشین‌ها دارد که هرکدام از خطوط عبور به عرض ۲ متر هستند و ماشین‌هایی به ارتفاع حداکثر ۴ متر می‌توانند از همه این خطوط وارد تونل شوند. حداقل شعاع این تونل نیم‌دایره شکل را محاسبه کنید.

آزمون مرحله اول چهل و دومین المپیاد ریاضی

۸. در کدام یک از گزینه‌های زیر مربع عدد $۹۸۷, ۶۵۴, ۳۲۱$ نوشته شده است؟ (از , به عنوان جداکننده هر سه رقم استفاده شده است تا به خواندن اعداد کمک کند.)

(۱) $۹۷۵, ۴۶۱, ۰۵۱, ۷۸۹, ۹۷۱, ۰۴۱$

(۲) $۹۷۵, ۴۶۱, ۰۵۳, ۷۸۹, ۹۷۱, ۰۴۱$

(۳) $۹۷۵, ۴۶۱, ۰۵۵, ۷۸۹, ۹۷۱, ۰۴۱$

(۴) $۹۷۵, ۴۶۱, ۰۵۷, ۷۸۹, ۹۷۱, ۰۴۱$

(۵) $۹۷۵, ۴۶۱, ۰۵۹, ۷۸۹, ۹۷۸, ۰۴۱$

۹. میدانی به شکل زیر داریم. در هر ثانیه از هر خیابان دقیقا یک ماشین وارد میدان می‌شود و به صورت پادساعت‌گرد در میدان حرکت می‌کند. هر ماشینی که از یک خیابان وارد میدان می‌شود قبل از اینکه یک دور کامل در میدان بزند، با احتمال برابر از یکی از سه خیابان دیگر خارج می‌شود. اگر بدانیم یک ماشین از ناحیه هاشور خورده عبور کرده است، احتمال اینکه این ماشین از خیابان ۱ خارج شده باشد چقدر است؟

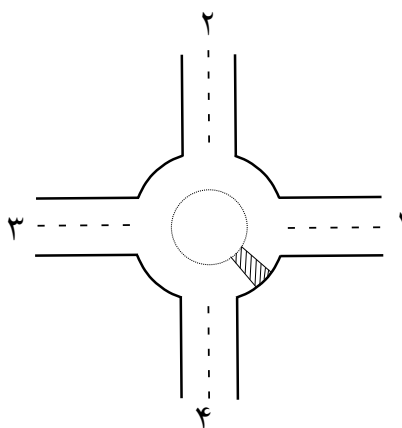
$\frac{1}{6}$ (۵)

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)



۱۰. زیرمجموعه S از اعداد حقیقی مثبت را «خوب» می‌گوییم اگر بیش از یک عضو داشته باشد و به ازای هر $x, y \in S$ داشته باشیم $xy \in S$. برای چند تا از خاصیت‌های زیر مجموعه‌ای خوب می‌توان مثال زد که خاصیت مورد نظر را داشته باشد؟

- S متناهی عضو داشته باشد.
- برای هر بازه با طول بیشتر از صفر در اعداد مثبت، بی‌نهایت عضو S در آن بازه باشند.
- S نامتناهی عضو داشته باشد ولی کران بالا داشته باشد. یعنی عدد M موجود باشد که از تمامی اعضای مجموعه بیشتر است.
- S کوچکترین و بزرگترین عضو داشته باشد.

۱۱. در یکی از حملات علیه ایران، یک جنگنده «اف ۳۵» که همواره در ارتفاع ثابتی پرواز می‌کرد، از خاک کشور عراق به سمت مرزهای کشورمان در حال نزدیک شدن بود که رادار ایرانی «باور ۳۷۳» که در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین مستقر شده بود در اولین فرصت و در فاصله مستقیم 390° کیلومتری از خود، توانست این جنگنده را شناسایی و حمله آن را خنثی کند. اگر شعاع کره زمین را ۶۳۹۹ کیلومتر در نظر بگیریم، ارتفاع پرواز این جنگنده حدود چند کیلومتر بوده است؟ (رادار را یک نقطه در نظر بگیرید که اگر خط مستقیمی بدون مانع از رادار به هواپیما وجود داشته باشد هواپیما را شناسایی می‌کند.)



۱ (۵)

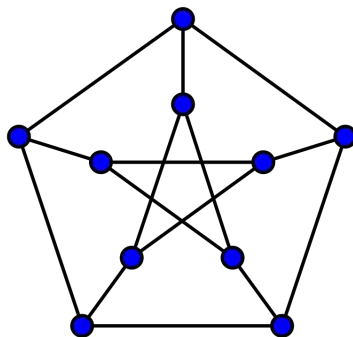
۷ (۴)

۲ (۳)

۱۰ (۲)

۵ (۱)

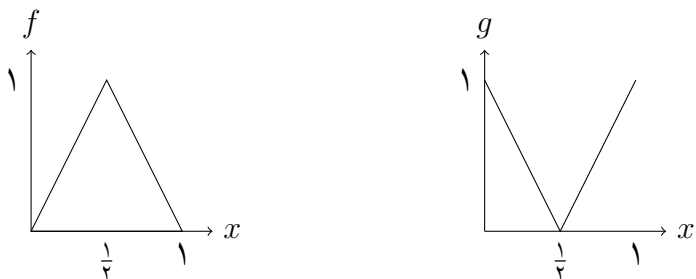
۱۲. در شکل زیر داخل دایره‌ها غنچه روییده است. تعدادی از این غنچه‌ها شکوفا شده‌اند. در هر مرحله غنچه درون دایره‌ای که حداقل دو تا از غنچه‌های مجاورش شکوفا شده باشند، شکوفا می‌شود. اگر پس از مدتی همه غنچه‌ها شکوفا شوند، حداقل چند غنچه در اول شکوفا شده بوده‌اند؟ (منظور از دو غنچه مجاور غنچه‌هایی هستند که دایره‌هایی که در آن قرار دارند در شکل با خطی مستقیم به هم وصل شده‌اند.)



آزمون مرحله اول چهل و دومین المپیاد ریاضی

۱۳. فرض کنید نمودار دو تابع $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ مطابق شکل‌های زیر باشد. در این صورت کدام گزینه درست است؟

- (۱) برای هر $x \in [0, 1]$ $f(f(x)) = g(g(x))$.
- (۲) برای هر $x \in [0, 1]$ $f(f(x)) = f(g(x))$.
- (۳) برای هر $x \in [0, 1]$ $f(f(x)) = g(f(x))$.
- (۴) هیچ کدام از موارد قبلی درست نیست.
- (۵) در بین سه گزینه اول، دست کم دو مورد درست است.



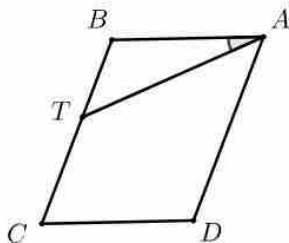
۱۴. در دوزنقه $ABCD$ ، می‌دانیم $AB = \frac{1}{3}CD = \sqrt{3}$ و $BC = AD = \sqrt{7}$. P را دومین نقطه برخورد دایره‌های AD و CD (غیر از D) بگیرید. مساحت مثلث PAB کدام است؟

- $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (۵)
 $\frac{\sqrt{3}}{7}$ (۴)
 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۳)
 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲)
 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)

۱۵. چند زوج مرتب (a, b) از عددهای صحیح و مثبت پیدا می‌شود که ab^2 برابر 21^2 باشد؟

۱۶. علی و رضا یک بازی نوبتی را به این ترتیب انجام می‌دهند که در مرحله اول علی یک عدد کوچک تر از 50° انتخاب می‌کند. در مراحل بعدی در هر مرحله بازیکنی که نوبت اوست می‌تواند یک واحد از عدد کم کند یا آن را با یکی از مقسوم‌علیه‌هایش به جز عدد یک و خود آن عدد، عوض کند. بازی زمانی تمام می‌شود که به عدد ۲ برسیم. هدف علی این است که بازی تا جای امکان طول بکشد و هدف رضا این است که بازی هر چه سریع‌تر تمام شود. اگر هر دو بهترین بازی خود را انجام دهند بازی آن‌ها حداکثر چند مرحله طول می‌کشد؟
 📌 حاصل عددی زوج است.

۱۷. متوازی‌الاضلاع $ABCD$ در صفحه مفروض است به طوری که $AB = ۲۱$. نقطه T را روی پاره‌خط BC طوری انتخاب کرده‌ایم که $\angle TAB = ۳۰^\circ$ و $\frac{BT}{TC} = \frac{۳}{۷}$. فاصله نقطه D از خط AT را به دست بیاورید.



۱۸. تعداد عددهای حقیقی و ناصفر x را بیابید که رابطه زیر برقرار باشد. (منظور از $[x]$ ، جزء صحیح x یعنی بزرگترین عدد صحیحی که از x بیشتر نباشد است.)

$$\frac{x}{[x]} = \frac{۱۴۰۳}{۱۴۰۲}$$

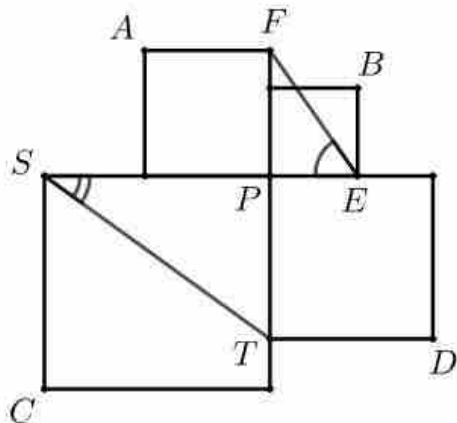
📌 جواب عددی فرد است.

۱۹. یک تخته چوبی به شکل پنج‌ضلعی منتظم داریم که از هر پنج گوشه‌اش با طناب از سقف آویزان شده است و موازی سطح زمین قرار دارد. یک سیب در مرکز این چند ضلعی قرار داده‌ایم. یک تیرانداز به هر کدام از طناب‌ها یک بار شلیک می‌کند. اگر هر شلیک او به احتمال پنجاه درصد طناب را پاره کند احتمال اینکه سیب سقوط کند عددی به شکل $\frac{m}{n}$ است که m و n نسبت به هم اول هستند. در این صورت اختلاف m و n چند است؟ (فرض کنید اگر تخته چوبی دیگر موازی سطح زمین نباشد سیب سقوط خواهد کرد.)

۲۰. چند دوتایی (x, y) از اعداد حقیقی نامنفی وجود دارند که $x, y \leq ۴$ و داشته باشیم:

$$(x + y)^2 = (1 + x)(y - 1)$$

۲۱. در شکل زیر چهار مربع را طوری کنار هم گذاشته‌ایم که چهارضلعی $ABCD$ محاطی شده است. اگر زاویه $\angle PST$ برابر 30° درجه باشد، زاویه $\angle FEP$ چند درجه خواهد بود؟



۲۲. چند دوتایی (m, n) از اعداد طبیعی موجود هستند که $m^{14^3} + n$ بر mn قابل قسمت باشد؟

۲۳. ساختمان یاس ساختمانی با تعداد طبقات نامتناهی است که از بالا و پایین بدون انتهاست! طبقات این ساختمان با تمام اعداد صحیح شماره‌گذاری شده‌اند. همچنین این ساختمان یک آسانسور عجیب دارد که به‌طور خودکار بین طبقات جابه‌جا می‌شود! به این صورت که اگر در طبقه‌ای با شماره زوج مانند $2n$ قرار داشته باشد به طبقه n می‌رود و در غیر این صورت 7 طبقه بالا می‌رود. اگر در مرحله‌ای در طبقه 40^3 باشد، 15 مرحله قبل‌تر در چند طبقه مختلف ممکن است بوده باشد؟
 📌 جواب بر 3 بخش‌پذیر است.

۲۴. تعریف کنید

$$\alpha = \log_1 2, \beta = \log_1 3, \gamma = \log_1 5, \theta = \log_1 7$$

عددهای زیر همگی به عددی صحیح نزدیک هستند. کدام یک نزدیک‌ترین عدد به عددی صحیح است؟

$\beta + \theta + \gamma$ (۵) $2\alpha + 6\beta$ (۴) $2\alpha + \beta + \theta$ (۳) $5\alpha + \beta$ (۲) 2β (۱)

۲۵. می‌خواهیم از روی خطوط، این شکل را تا بزنیم تا در نهایت فقط یک مثلث کوچک دیده شود. حداقل به چندبار تا زدن نیاز داریم؟

