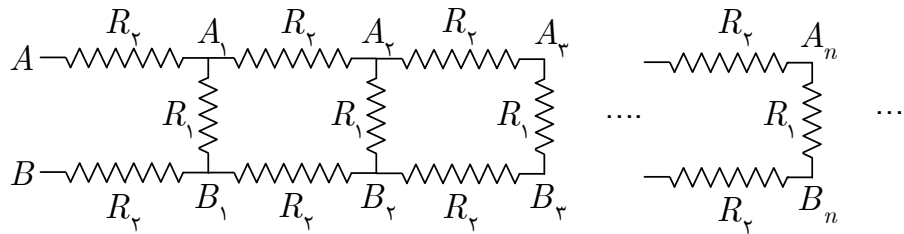
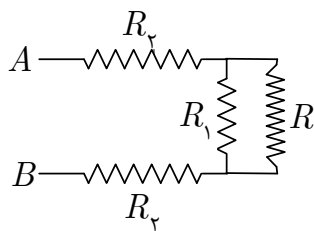




۱) در مدار شکل ۱، الگوی مقاومت های $R_p - R_1 - R_p$ بین دو نقطه A و B بی نهایت بار تکرار می شود.



شکل ۱



شکل ۲

چون الگوی سه مقاومت تا بی نهایت تکرار می شود مقاومت دو سر مدار با اضافه شدن یک الگوی اضافه در ابتدای آن تغییری نمی کند. یعنی اگر مقاومت دو نقطه A و B برابر R باشد، مدار شکل ۱ معادل مدار شکل ۲ می شود.

آ) مقاومت R بین دو نقطه A و B را بر حسب R_1 و R_p به دست آورید.

در بخش های زیر فرض کنید ولتاژ V_0 را به دو سر A و B وصل کرده ایم.

ب) ولتاژ V_1 بین A_1 و B_1 در مدار شکل ۱ بر حسب V_0 ، R_1 و R_p چقدر است؟

پ) ولتاژ بین A_n و B_n روی دو سر n امین R_1 در مدار شکل ۱ بر حسب V_0 ، R_1 و R_p چقدر است؟

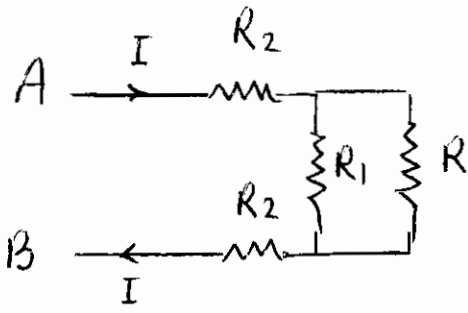
ت) مجموع توان مصرفی در تمام مقاومت های R_1 را با P_1 نشان می دهیم. P_1 را بر حسب V_0 ، R_1 و R_p به

دست آورید.

ث) با فرض آن که $x = \frac{R_1}{R_p}$ و $y = \frac{P_1}{P}$ که P توان کل مصرفی در مدار است، رابطه y بر حسب x را به

دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

(1) مسئله



$$R = 2R_2 + \frac{RR_1}{R+R_1} \quad (1)$$

$$R^2 - 2R_2R - 2R_1R_2 = 0$$

$$\boxed{R = R_2 + \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}} \quad (1)$$

$$I = \frac{V_0}{R} \quad , \quad V_{A_1B_1} = V_0 - 2R_2I \quad (2)$$

$$\boxed{V_1 = V_0 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)}$$

$$V_2 \equiv V_{A_2B_2} = V_1 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right) = V_0 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2 \quad (3)$$

$$\boxed{V_n \equiv V_{A_nB_n} = V_0 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^n}$$

(ت) توان مصرفی در n امین R_1 ها $P_n^{(R_1)}$ است

$$P_n^{(R_1)} = \frac{V_n^2}{R_1} = \frac{V_0^2}{R_1} \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^{2n}$$

و مجموع توان مصرفی در R_1 ها :

$$P_1 = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(R_1)} = \frac{V_0^2}{R_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^{2n} = \frac{V_0^2}{R_1} \frac{\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2}{1 - \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2} \quad (4)$$

$$\boxed{P_1 = \frac{V_0^2 (R_1 + R_2 - \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2})}{2R_1 \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}}}$$

با تکرار تابع R از معادله (1) در (4) و ساده کردن جواب

$$P = \frac{V_0^2}{R} = \frac{V_0^2}{R_2 + \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}}$$

توان کل مصرفی در مدار

$$y = \frac{P_1}{P}$$

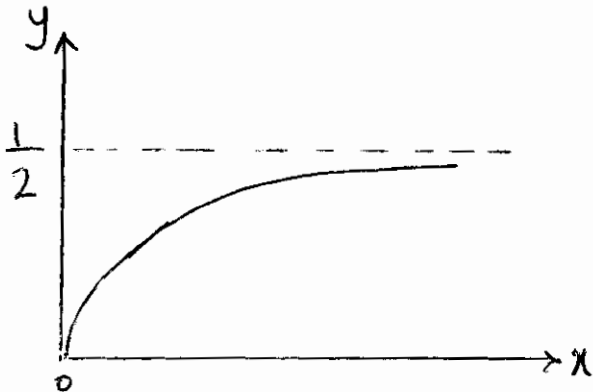
نسبت توان سلفی در مدار y در معادله

به نسبتی در زیر حل می‌کنیم

$$y = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}} \right)$$

اگر $\frac{R_1}{R_2}$ را x بنویسیم

$$y = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2x}} \right)$$





۲) در پدیده دوپلر اگر یک چشمه صوتی متحرک با بسامد f_s با سرعت لحظه‌ای v_s حرکت کند، بسامد دریافت شده

توسط یک گیرنده ساکن $f = f_s \frac{u}{u \pm v_s}$ است که u سرعت صوت در هوای ساکن است و علامت مثبت برای

وضعیتی است که چشمه از گیرنده دور می‌شود و علامت منفی برای وضعیتی است که چشمه به گیرنده نزدیک می‌شود.

در صورتی که سرعت چشمه با زمان تغییر کند باید توجه داشت که اگر صوت با بسامد f_s در لحظه t' از چشمه منتشر

شود، در لحظه متفاوت t توسط گیرنده دریافت می‌شود. در این حالت v_s در فرمول بالا سرعت چشمه در لحظه t'

است و f بسامد دریافت شده توسط گیرنده در لحظه t است.

حال فرض کنید یک چشمه صوتی با بسامد f_s از ارتفاع h از سطح زمین در لحظه $t' = 0$ از حال سکون رها شود.

گیرنده‌ای درست زیر آن روی سطح زمین قرار دارد و بسامد $f(t)$ دریافت شده بر حسب زمان را اندازه‌گیری می‌کند.

فرض کنید چشمه در زمان t' بعد از رها شدن، صوت با بسامد f_s منتشر می‌کند. شتاب گرانش را g بگیرید و از نیروی

مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید.

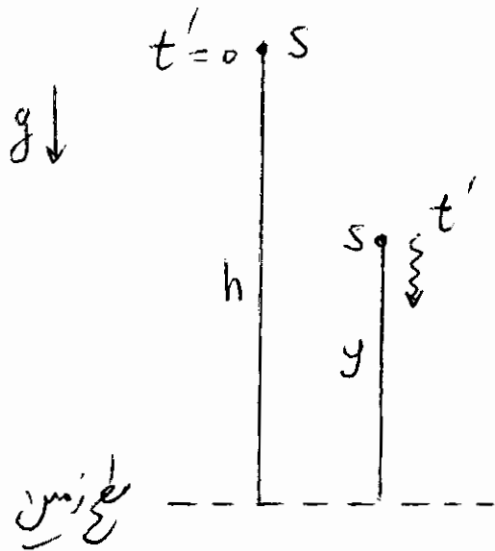
آ) زمان t' را بر حسب u ، g ، h و t به دست آورید.

ب) سرعت چشمه در زمان t' یعنی $v_s(t')$ را بر حسب u ، g ، h و t به دست آورید.

پ) بسامد اندازه‌گیری شده توسط گیرنده روی زمین در زمان t ، یعنی $f(t)$ را بر حسب f_s ، u ، g ، h و t به

دست آورید. فرض کنید سرعت چشمه همواره کمتر از سرعت صوت است.

ت) نشان دهید $\frac{1}{f^2} = A + Bt$ و A و B را بر حسب f_s ، u ، g و h تعیین کنید.



مسئله (۲)
 (۱) ضربه در لحظه $t'=0$ در ارتفاع h از سطح زمین

و در لحظه t' در ارتفاع y از سطح زمین است

و سرعت آن v_s است

$$v_s = gt' \quad \text{و} \quad y = h - \frac{1}{2}gt'^2$$

صوت در لحظه t' ارسال می‌شود و در لحظه t

به‌گیرنده در زمین می‌رسد

$$t = t' + \frac{y}{u}$$

از دو معادله اخذ

$$gt'^2 - 2ut' + 2ut - 2h = 0$$

$$t' = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + 2gh - 2ugt}}{g}$$

$$v_s(t) = u - \sqrt{u^2 + 2g(h - ut)}$$

(ب)

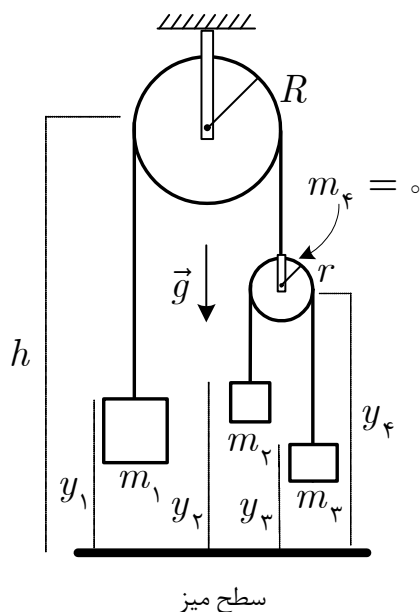
$$f(t) = f_s \frac{u}{u - v_s(t)}$$

(ج)

$$f(t) = f_s \frac{u}{\sqrt{u^2 + 2g(h - ut)}}$$

(د) $\frac{1}{f(t)^2} = \frac{1}{f_s^2} \left(1 + \frac{2gh}{u^2} - \frac{2gt}{u} \right)$ (ریشه)

$$A = \frac{1}{f_s^2} \left(1 + \frac{2gh}{u^2} \right), \quad B = -\frac{2g}{uf_s^2}$$



۳) سه جسم به جرم‌های m_1 ، m_2 و m_3 به یک مجموعه نخ و قرقره مطابق شکل متصل‌اند. قرقره متحرک را جسم چهارم به جرم $m_4 = 0$ در نظر بگیرید. قرقره ثابت و نخ‌ها نیز بدون جرم هستند. شتاب گرانش g ، شعاع قرقره ثابت R ، شعاع قرقره متحرک r ، طول نخ روی قرقره ثابت D و طول نخ روی قرقره متحرک d است. در لحظه $t = 0$ در حالی که جرم‌ها در فواصل اولیه y_1 ، y_2 ، y_3 و y_4 از سطح میز قرار دارند، دستگاه از حالت سکون رها می‌شود. شتاب این چهار جسم نیز به ترتیب a_1 ، a_2 ، a_3 و a_4 است.

آ) ارتفاع جرم‌ها از سطح میز در لحظه دلخواه t را به ترتیب y_1 ، y_2 ، y_3 و y_4 بگیرید. D و d را بر حسب این کمیت‌ها، h فاصله مرکز قرقره ثابت از سطح میز، R و r بنویسید.

ب) در روابطی که در قسمت آ به دست آوردید، به ازای $i = 1, 2, 3, 4$ ، هر کدام از y_i ‌ها را بر حسب زمان، شتاب مربوطه a_i و فاصله اولیه از سطح میز y_{i0} بنویسید.

پ) روابط قسمت ب را برای لحظه $t = 0$ بنویسید و با ترکیب نتیجه به دست آمده با روابط قسمت ب، دو رابطه مستقل بین شتاب‌ها به دست آورید.

ت) قانون دوم نیوتون را برای جرم‌های m_1 ، m_2 ، m_3 و قرقره متحرک بنویسید و با استفاده از رابطه بین شتاب‌ها که در قسمت پ به دست آوردید، کلیه شتاب‌ها و کشش نخ‌ها را بر حسب جرم‌ها و شتاب گرانش به دست آورید.

ث) جسم m_2 چه شرطی باید داشته باشد تا شتاب حرکتش نسبت به میز رو به بالا باشد؟



سازمان ملی پرورش استعداد های در شان

ج) با فرض $y_{۳۰} = y_{۲۰}$ ، مدت زمانی که طول می کشد تا لبه بالایی جسم m_p هم تراز با پایین ترین نقطه قرقره

متحرک شود، چقدر است؟

(۳) سینه
(۲)

$$D = (h - y_1) + \pi R + (h - y_4)$$

$$d = (y_4 - y_2) + \pi R + (y_4 - y_3)$$

$$D = (h - \frac{1}{2} a_1 t^2 - y_{10}) + \pi R + (h - \frac{1}{2} a_4 t^2 - y_{40})$$

$$d = (\frac{1}{2} a_4 t^2 + y_{40} - \frac{1}{2} a_2 t^2 - y_{20}) + \pi R + (\frac{1}{2} a_4 t^2 + y_{40} - \frac{1}{2} a_3 t^2 - y_{30})$$

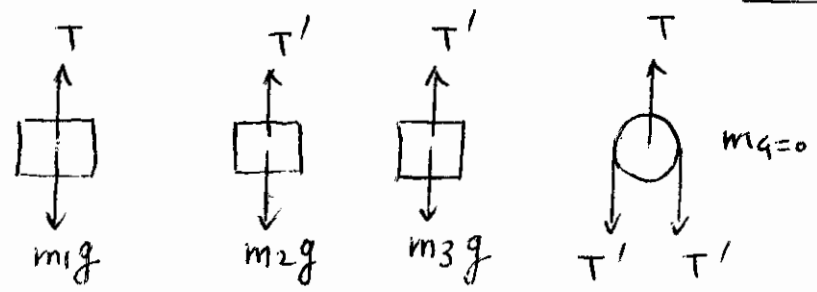
(ب) روابط قسمت آ) برار کنیم $t=0$ سینه و سینه سینه

$$D = (h - y_{10}) + \pi R + (h - y_{40})$$

$$d = (y_{40} - y_{20}) + \pi R + (y_{40} - y_{30})$$

از معادله ب) روابط قسمت ب) برار

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} a_1 t^2 - \frac{1}{2} a_4 t^2 = 0 \\ a_4 t^2 - \frac{1}{2} a_2 t^2 - \frac{1}{2} a_3 t^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_4 = 0 \\ 2a_4 - a_2 - a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a_1 - a_2 - a_3 = 0 \\ (1) \end{cases}$$



(ج) نمودار جسم آزاد

$$T - m_1 g = m_1 a_1 \quad (۲) \quad T' - m_2 g = m_2 a_2 \quad (۳) \quad T' - m_3 g = m_3 a_3 \quad (۴) \quad T - 2T' - (0)g = (0)a_4$$

$T' = T/2$

اگر معادلات (۲) و (۳) و (۴) را به ترتیب در $m_1 m_2$ ، $m_1 m_3$ و $2m_2 m_3$ ضرب و جمع بگیریم، با توجه به (۱) خواهیم داشت

$$2 m_2 m_3 (T - m_1 g) + m_1 m_3 (\frac{T}{2} - m_2 g) + m_1 m_2 (\frac{T}{2} - m_3 g) = 0$$

$$T = \frac{8 m_1 m_2 m_3 g}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3} \quad , \quad T' = \frac{T}{2}$$

با قرار دادن T و T' در معادلات (۲) و (۳) و (۴)؛

$$a_1 = \frac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g$$

$$a_4 = -a_1$$

$$a_2 = \frac{3m_1m_3 - m_1m_2 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g$$

$$a_3 = \frac{3m_1m_2 - m_1m_3 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g$$

$$\boxed{\frac{3}{m_2} > \frac{1}{m_3} + \frac{4}{m_1}}$$

ث (ت) بار این $a_2 > 0$ و $a_4 < 0$

$$y_{20} + \frac{1}{2}(d - \pi r) = y_{40} \quad ; \quad y_{20} = y_{30} \quad \text{ع (ج) وقتی}$$

$$y_2(t) = y_4(t) - r \quad \text{ی خواصم}$$

$$\frac{1}{2} a_2 t^2 + y_{20} = \frac{1}{2} a_4 t^2 + y_{40} - r$$

$$(a_2 - a_4) t^2 = d - r(2 + \pi)$$

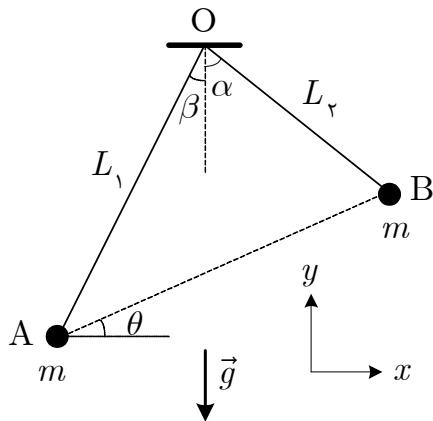
درستی

$$\frac{2(m_1m_3 - m_1m_2)g}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} t^2 = d - r(2 + \pi)$$

$m_3 > m_2$ و m_1

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{d - r(2 + \pi)}{2g} \frac{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}{m_1(m_3 - m_2)}}$$

درستی



۴) دو گلوله کوچک هر یک به جرم m دارای بار الکتریکی هم نام هستند و مطابق شکل به دو نخ بسیار سبک به طول های L_1 و L_2 متصل اند. دو انتهای دیگر نخ ها به تکیه گاهی واقع در نقطه O بسته شده اند. مقدار بار الکتریکی روی گلوله ها به گونه ای است که دستگاه در حضور نیروی دافعه الکتریکی بین بارها و نیروی گرانش در حالت تعادل است و زاویه α معلوم است.

آ) قانون دوم نیوتون را در دو راستای x و y برای هر یک از گلوله ها بر حسب توابع مثلثاتی زاویه های α ، β ، θ ، اندازه نیروی دافعه کولنی F ، mg و نیروی کشش نخ ها بنویسید.

ب) با استفاده از معادلات قسمت آ، $\tan \theta$ را بر حسب توابع مثلثاتی زاویه های α و β به دست آورید.

پ) طول پاره خط AB را d بنامید. $d \sin \theta$ و $d \cos \theta$ را بر حسب L_1 ، L_2 و توابع مثلثاتی زاویه های α و β بنویسید.

ت) زاویه β را بر حسب $\frac{L_2}{L_1}$ و توابع مثلثاتی زاویه α به دست آورید.

ث) نیروی کشش هر کدام از نخ ها را بر حسب mg ، $\frac{L_2}{L_1}$ و توابع مثلثاتی زاویه α به دست آورید.

ج) به ازای $\frac{L_2}{L_1} = 1$ نیروی کشش هر کدام از نخ ها چقدر است؟



ساکنان آبی پرورش استعدادهای درخشان

چ) فرض کنید طول نخ‌ها به اندازه‌ای است که $\alpha = \frac{\pi}{3}$ و $\beta = \frac{\pi}{6}$ باشد. نیروی کشش هر کدام از نخ‌ها و اندازه

نیروی دافعه کولنی را بر حسب mg به دست آورید.

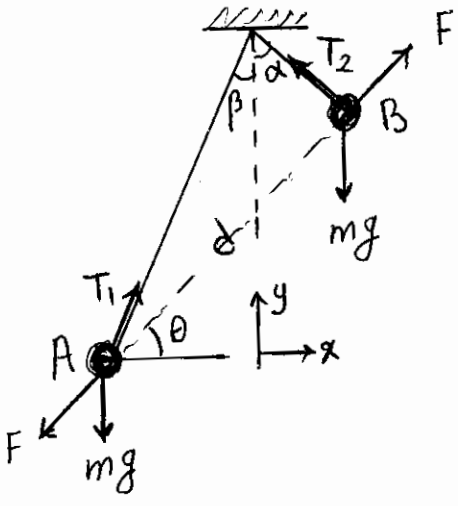
مسئله (۴)

بار جرم m است راستی

$$\begin{aligned} x: & F \cos \theta - T_2 \sin \alpha = 0 \quad (1) \\ y: & F \sin \theta + T_2 \cos \alpha - mg = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

بار جرم m است چپ

$$\begin{aligned} x: & -F \cos \theta + T_1 \sin \beta = 0 \quad (3) \\ y: & -F \sin \theta + T_1 \cos \beta - mg = 0 \quad (4) \end{aligned}$$



(۳) با تکرار داریم T_2 از معادله (۱) و معادله (۲)

$$F (\sin \theta + \cos \theta \cot \alpha) = mg \quad (5)$$

و با تکرار دادن T_1 از معادله (۳) و معادله (۴)

$$F (-\sin \theta + \cos \theta \cot \beta) = mg \quad (6)$$

از تقسیم معادلات (۵) و (۶)

$$\boxed{\tan \theta = \frac{1}{2} (\cot \beta - \cot \alpha)} \quad (7)$$

(۳)

$$\begin{aligned} d \sin \theta &= L_1 \cos \beta - L_2 \cos \alpha \\ d \cos \theta &= L_1 \sin \beta + L_2 \sin \alpha \end{aligned}$$

از تقسیم دو معادله

$$\tan \theta = \frac{L_1 \cos \beta - L_2 \cos \alpha}{L_1 \sin \beta + L_2 \sin \alpha} \quad (8)$$

(۳) از مساوی قرار دادن معادلات (۷) و (۸) و پس از ساده کردن

$$\boxed{\sin \beta = \frac{L_2}{L_1} \sin \alpha} \quad (9)$$

ث) با تکرار راجع $\sin \beta$ از معادله (۹) در معادله (۷)

$$\tan \theta = \frac{1}{2 \sin \alpha} \left(\frac{L_1}{L_2} \sqrt{1 - \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right) \quad (10)$$

با حذف F بین دو معادله (۱) و (۲)

$$T_2 = \frac{mg}{\tan \theta \sin \alpha + \cos \alpha} \quad (11)$$

و با حذف F بین دو معادله (۳) و (۴) و استفاده از معادله (۷)

$$T_1 = \frac{mg}{\tan \theta \sin \alpha + \cos \alpha} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (12)$$

با تکرار راجع (۱۰) در (۱۱)

$$T_2 = \frac{2mg}{\frac{L_1}{L_2} \sqrt{1 - \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \sin^2 \alpha} + \cos \alpha} \quad (13)$$

با تکرار راجع (۱۰) در (۱۲) و استفاده از معادله (۹)

$$T_1 = \frac{2mg \left(\frac{L_1}{L_2}\right)}{\frac{L_1}{L_2} \sqrt{1 - \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \sin^2 \alpha} + \cos \alpha} \quad (14)$$

$$T_1 = T_2 = \frac{mg}{\cos \alpha}$$

یعنی به ازای $L_1 = L_2$

یعنی به ازای $\alpha = \frac{\pi}{3}$ و $\beta = \frac{\pi}{6}$ از معادله (۹) خواصم داشت

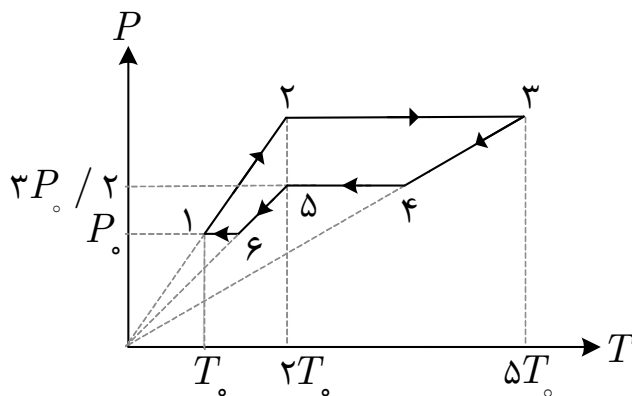
$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

با تکرار راجع $\frac{L_2}{L_1}$ در معادلات (۱۳) و (۱۴) و $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$$T_2 = \frac{2mg}{\sqrt{3 - \sin^2 \alpha} + \cos \alpha} = mg \quad , \quad T_1 = \frac{2\sqrt{3}mg}{\sqrt{3 - \sin^2 \alpha} + \cos \alpha} = \sqrt{3}mg$$

$$F = T_2 = mg$$

از معادله (۱۰) به دست می آید $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و در نتیجه



۵) چرخه ۱۲۳۴۵۶۱ در شکل مقابل، فرآیند n مول گاز

کامل تک اتمی را نشان می‌دهد. کمیت‌های T_0 و P_0

معلوم‌اند. ثابت گازها R است. انرژی داخلی n مول

گاز کامل تک اتمی با دمای T برابر $\frac{3}{2}nRT$ است.

آ) چرخه را در صفحه $P-V$ رسم کنید و

مختصات (P, V, T) نقاط متناظر با شش نقطه نشان داده شده در نمودار فوق را به دست آورید.

ب) کار کل انجام شده روی گاز را در چرخه کامل بر حسب n ، R و T_0 به دست آورید. این کار مثبت است یا

منفی؟

پ) در کدام یک از فرآیندهای $1 \rightarrow 2$ ، $2 \rightarrow 3$ ، $3 \rightarrow 4$ ، $4 \rightarrow 5$ ، $5 \rightarrow 6$ و $6 \rightarrow 1$ گاز از محیط گرما

می‌گیرد؟ مجموع گرماهای داده شده از محیط به گاز در این چرخه را بر حسب n ، R و T_0 به دست آورید.

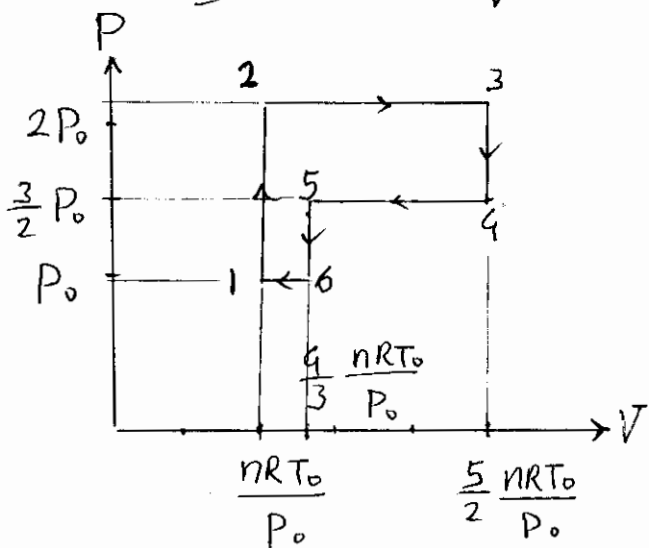
ت) اگر این چرخه مربوط به یک ماشین گرمایی باشد، بازده این ماشین گرمایی چقدر است؟

مسئله ۵

(۲) با توجه به معادله گاز کامل $PV = nRT$ در نمودار P

بر حسب T شیب (ضریب زاویه) $\frac{nR}{V}$ است، بنابراین خطوط

دارای شیب یکسان هم رسم هستند



نقطه (۱) $(P_0, \frac{nRT_0}{P_0}, T_0)$

نقطه (۲) $(2P_0, \frac{nRT_0}{P_0}, 2T_0)$

نقطه (۳) $(2P_0, \frac{5}{2} \frac{nRT_0}{P_0}, 5T_0)$

نقطه (۴) $(\frac{3}{2} P_0, \frac{5}{2} \frac{nRT_0}{P_0}, \frac{15}{4} T_0)$

نقطه (۵) $(\frac{3}{2} P_0, \frac{4}{3} \frac{nRT_0}{P_0}, 2T_0)$

نقطه (۶) $(P_0, \frac{4}{3} \frac{nRT_0}{P_0}, \frac{4}{3} T_0)$

(ب) کار، صرفه منفی مساحت داخل حوضه $P-V$ ، در صفت $P-V$ است

$$|W| = \left(\frac{5}{2} \frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0} \right) \frac{P_0}{2} + \left(\frac{4}{3} \frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0} \right) \frac{P_0}{2}$$

$$|W| = \frac{11}{12} nRT_0$$

W صرفه منفی است.

(پ) اگر Q گرمای داده شده به گاز در یک حوضه باشد

$$Q = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3}$$

در فرآیندهای ۱→۲ و ۲→۳ گاز از محیط بیرون میگیرد.

$$U_2 - U_1 = W_{1 \rightarrow 2} + Q_{1 \rightarrow 2}$$

اما طبق قانون اول ترمودینامیک

$$\frac{3}{2} nR(2T_0) - \frac{3}{2} nRT_0 = 0 + Q_{1 \rightarrow 2} \Rightarrow Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{3}{2} nRT_0$$

$$U_3 - U_2 = W_{2 \rightarrow 3} + Q_{2 \rightarrow 3}$$

$$\frac{3}{2} nR(5T_0) - \frac{3}{2} nR(2T_0) = -(2P_0) \left(\frac{5}{2} \frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0} \right) + Q_{2 \rightarrow 3}$$

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \frac{15}{2} nRT_0$$

$$Q = \frac{3}{2} nRT_0 + \frac{15}{2} nRT_0$$

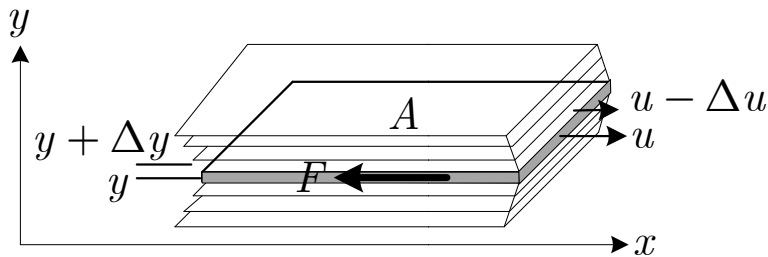
بنا بر این

$$Q = 9nRT_0$$

$$\text{بازده} = \frac{\text{کار}}{\text{انرژی داده شده}} = \frac{11}{12} \frac{1}{9} \approx \frac{1}{10}$$

(5)

$$\text{بازده} = \frac{11}{108} \approx \frac{1}{10}$$



۶) گرانیروی (Viscosity) خاصیتی از یک

سیال است که باعث کندی حرکت اجسام

نسبت به سیال می‌شود. سیال را به صورت

لایه‌هایی با ضخامت ناچیز Δy در نظر

بگیرید. اگر جسمی در راستای x با سرعت u در داخل یک سیال حرکت کند، لایه‌ای از سیال که در مجاورت آن است

تقریباً همراه آن کشیده می‌شود. لایه‌های دورتر نیز به دلیل خاصیت گرانیروی به حرکت در می‌آیند و هر چه در جهت

عمود بر لایه‌های متحرک (راستای y در شکل بالا) از جسم دورتر شویم سرعت آن‌ها کمتر می‌شود. به بیان دیگر اگر

Δu اختلاف سرعت دو لایه مجاور باشد، $\frac{\Delta u}{\Delta y}$ کمیتی مخالف صفر است. به این ترتیب اگر سطح تماس جسم با

سیال A باشد نیروی اصطکاک F در خلاف جهت حرکتش به آن وارد می‌شود که اندازه آن از رابطه

$$F = \eta A \left| \frac{\Delta u}{\Delta y} \right|$$

به دست می‌آید. در این رابطه، η ضریب گرانیروی نامیده می‌شود.

آ) واحد ضریب گرانیروی در دستگاه واحدهای SI را بر حسب پاسکال و سایر کمیت‌های اصلی بیان کنید.

اگر یک جسم کروی به شعاع r با سرعت u در داخل یک سیال گرانیرو حرکت کند می‌توان نشان داد نیروی اصطکاک

$F = 6\pi\eta r u$ به آن وارد می‌شود که به این رابطه قانون استوکس گفته می‌شود. برای اجسام کوچک نیروی گرانیروی را

می‌توان تنها نیروی اصطکاک مهم در نظر گرفت.

ب) یک جسم کروی به شعاع r و چگالی ρ داخل سیالی به چگالی ρ' ($\rho > \rho'$) و ضریب گرانیروی η سقوط

می‌کند و پس از مدتی به سرعت ثابتی می‌رسد که به آن سرعت حد می‌گوییم. این سرعت را بر حسب ρ ، ρ' ، η ،

r و g به دست آورید.

پ) سرعت حد سقوط یک قطره کوچک کروی آب به قطر 0.4 mm را در جو زمین به دست آورید. همچنین سرعت حد سقوط یک ویروس کرونا که آن را کره‌ای به قطر $0.12 \mu\text{m}$ و با چگالی نزدیک آب می‌گیریم، به دست آورید. به داده‌های آخر مسئله توجه کنید.

در آزمایش معروف میلیکان تعداد بسیار زیادی از قطرات باردار روغن توسط یک عطریاش به داخل محفظه‌ای که بین دو الکتروود صفحه‌ای افقی قرار دارد پاشیده و به صورت عمودی سقوط می‌کنند. کلیه قطرات به دلیل کوچک بودن، در بازه زمانی ناچیزی به سرعت حد می‌رسند. با اعمال اختلاف پتانسیل بین صفحات می‌توان یک میدان الکتریکی یکنواخت در راستای قائم برقرار کرد. توسط یک میکروسکوپ می‌توان از بیرون، حرکت یک قطره روغن را با دقت رصد کرد و سرعت آن را اندازه‌گیری کرد.

ت) در شکل زیر رابطه خطی سرعت حد یک قطره روغن با ولتاژ اعمال شده بین صفحات داده شده است. فرض کنید ولتاژ صفحه بالایی به اندازه V از صفحه پایینی بیشتر است. در حرکت به سمت بالا u مثبت و در حرکت به سمت پایین u منفی فرض شده است. اگر V_0 و $-u_0$ به ترتیب طول از مبدأ و عرض از مبدأ رابطه خطی u بر حسب V باشد، شعاع قطره روغن و بار روی آن را بر حسب u_0 ، V_0 ، η (ضریب گرانروی هوا)، ρ_a (چگالی هوا)، ρ_0 (چگالی روغن)، g (شتاب گرانش) و d (فاصله عمودی بین الکتروودها) به دست آورید.

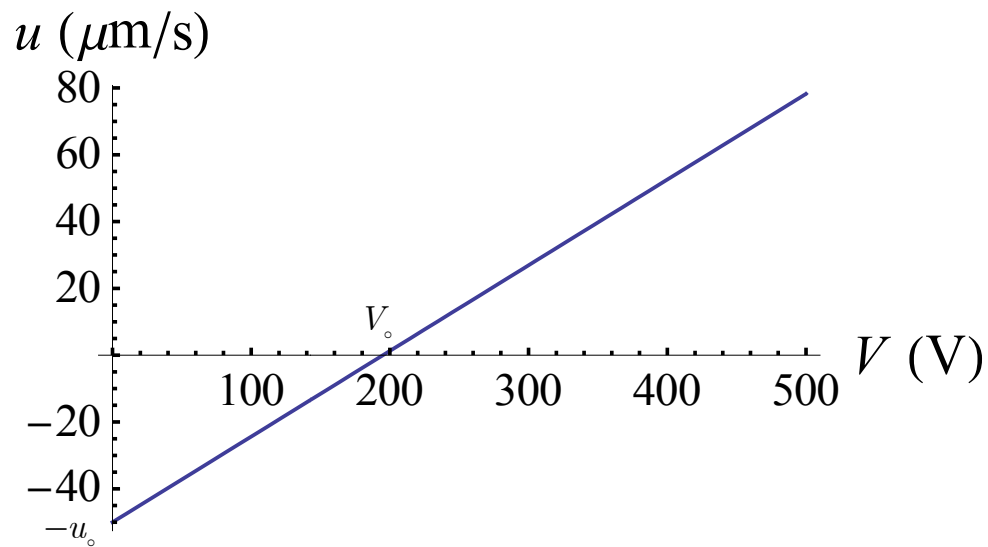
ث) با فرض مقادیر عددی زیر و با استفاده از مقادیر عددی V_0 و u_0 از روی نمودار، شعاع قطره و بار الکتریکی آن را حساب کنید.



داده های عددی:

$\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ (آب) ، $\rho_a = 1.2 \text{ kg/m}^3$ (هوا) ، $\rho_o = 880 \text{ kg/m}^3$ (روغن)

$\eta = 1.8 \times 10^{-5}$ (در دستگاه SI) ، $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ، $d = 1.0 \text{ mm}$

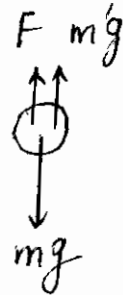


$$\frac{F}{A} = \eta \left| \frac{\Delta u}{\Delta y} \right| \Rightarrow Pa = (\eta \omega) \left(\frac{m}{s} \right)$$

(4) $\frac{m}{s}$
(1)

$$(\eta \omega) = Pa \cdot s$$

بدان رسیدن به سرعت حد شده - جسم صغیر است، در نتیجه



(ب)

$$F + m'g - mg = 0 \quad (a)$$

$$6\pi r \eta u_{\infty} + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 0$$

$$u_{\infty} = \frac{2}{9} \frac{(\rho - \rho') g r^2}{\eta}$$

F : نیروی اصطکاک
m'g : نیروی شناور
mg : نیروی کشش

بدان قطر آبی به شعاع $r = 0.2 \text{ mm}$ که در هوا $\rho' = \rho_a$ سقوط می کند

$$u_{\infty} = \frac{2}{9} \frac{(\rho_w - \rho_a) g r^2}{\eta} = \frac{2}{9} \frac{(1000 - 1.02)(9.8)}{1.8 \times 10^{-5}} (2 \times 10^{-4})^2$$

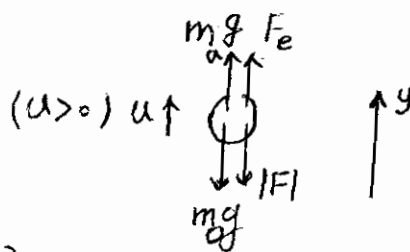
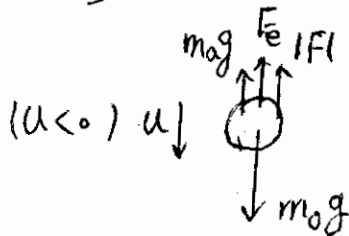
$$u_{\infty} = 4.8 \text{ m/s}$$

بدان دیدن گردان به شعاع $r = 0.06 \mu\text{m}$

$$u_{\infty} = 0.44 \mu\text{m/s}$$

(پ)

(ت) با توجه به نمودار داده شده در صورت مسئله در حالت تعین که $u = 0$ است، نیروی الکتریکی وارد بد قطره روغن باید به سمت بالا باشد، بنابراین بار الکتریکی قطره منفی است که آن را -191 mC می گیریم.



نمودار جسم آزاد بد حرکت قطره به سمت بالا و پایین:

$$191 \frac{V}{d} - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_a g - 6\pi \eta r u = 0 \quad \text{در هر دو حالت:}$$

$$u_{\infty} = \frac{191}{6\pi \eta r d} V - \frac{2}{9} \frac{(\rho_0 - \rho_a) g r^2}{\eta}$$

از آنجا که $\rho_a \ll \rho_0$ است از ρ_a در مقابل ρ_0 چشم پوشی می کنیم. با توجه به نمودار:
 به ازای $V=0$ داریم $u_{10} = -u_0$ در نتیجه

$$r = \sqrt{\frac{q \eta u_0}{2 \rho_0 g}}$$

به ازای $u_{10} = 0$ داریم $V = V_0$ در نتیجه

$$|q| = \frac{q}{3} \pi r^3 \rho_0 g \frac{d}{V_0}$$

با قرار دادن مقدار r به دست می آوریم:

$$|q| = \frac{18 \pi d}{V_0} \sqrt{\frac{\eta^3 u_0^3}{2 \rho_0 g}}$$

(ث) با توجه به نمودار $u_0 = 50 \mu\text{m/s}$ و $V_0 = 195 \text{V}$ در نتیجه:

$$r = \sqrt{\frac{q \eta u_0}{2 \rho_0 g}} = 3 \sqrt{\frac{(1.8 \times 10^{-5})(5 \times 10^{-5})}{(2)(880)(9.8)}} = \frac{(3)(3 \times 10^{-5})}{4 \sqrt{(110)(9.8)}} \approx \frac{9 \times 10^{-5}}{(4)(33)}$$

$$= \frac{30}{44} \mu\text{m} \Rightarrow |r \approx 0.68 \mu\text{m}|$$

$$|q| = \frac{6 \pi \eta u_0 d}{V_0} r = \frac{(6)(3.14)(1.8 \times 10^{-5})(5 \times 10^{-5})(8 \times 10^{-3})(30 \times 10^{-6})}{(195) \times (44)}$$

$$= \frac{(6)(3.14)(9)(20)}{65 \times 11} \times 10^{-19}$$

$$= \left(\frac{54}{11}\right) \left(\frac{6.28}{6.5}\right) \times 10^{-19}$$

$$\approx (5)(9.6) \times 10^{-19} \text{ C} = 4.8 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$|q| = 4.8 \times 10^{-19} \text{ C} = 3e$$