



مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

دفترچه سؤالات مرحله اول سال ۱۴۰۱

چهل و یکمین دوره المپیاد ریاضی

کد دفترچه: ۱

مدت آزمون	تعداد سؤالات	
	پاسخ کوتاه	پنج گزینه ای
۲۱۰ دقیقه	۱۶	۹

نام:

نام خانوادگی:

شماره صندلی:

توضیحات مهم

استفاده از هر نوع ماشین حساب ممنوع است.

- ۱- کد دفترچه سؤالات شما یک است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه با مداد پر کنید، در غیر این صورت پاسخ نامه شما تصحیح نخواهد شد.
- ۲- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و همه برگه های دفترچه سؤالات را بررسی نمایید، در صورت هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسؤول جلسه را مطلع کنید.
- ۳- یک برگ پاسخ نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است، در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسؤول جلسه را مطلع کنید. ضمناً مشخصات خواسته شده در بالای پاسخ نامه را با مداد مشکی بنویسید.
- ۴- برگه پاسخ نامه را دستگاه تصحیح می کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محل مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
- ۵- دفترچه باید همراه پاسخ نامه تحویل داده شود.
- ۶- سؤالات به دو شکل پاسخ کوتاه و پنج گزینه ای هستند، پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال پنج گزینه ای ۱ نمره منفی دارد. پاسخ نادرست به سوال های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد.
- ۷- شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان پایه دهم و یازدهم انتخاب می شوند، به علاوه تعدادی از دانش آموزان پایه دهم، به صورت آزمایشی و کسب تجربه، در آزمون مرحله دوم پذیرفته خواهند شد.
- ۸- وبگاه کمیته علمی المپیاد ریاضی ایران www.mathysc.ir است.



آزمون مرحله اول چهل و یکمین المپیاد

ریاضی کشور


دانش آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد. ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال، مشابه و شامل چهار ستون است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردن مشخص کنید.

سؤال ۱			
یکان	دهگان	صدگان	هزارگان
۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۲
۳	۳	۳	۳
۴	۴	۴	۴
۵	۵	۵	۵
۶	●	۶	●
۷	۷	۷	۷
۸	۸	۸	۸
۹	۹	●	۹


جواب سؤال‌های پاسخ کوتاه، عددی نامنفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵٫۷۳ بود، شما باید از قسمت اعشاری صرف‌نظر کرده و در پاسخ‌نامه، مانند شکل روبه‌رو، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید.

در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای، شماره گزینه درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.

همچنین در انتهای برخی از سوالات پاسخ کوتاه بخشی

به عنوان اطمینان از پاسخ قرار داده شده است، که با علامت  نمایش داده خواهد شد. این بخش یک خاصیتی از جواب را مطرح کرده و صرفاً برای جلوگیری از خطاهای محاسباتی احتمالی است.

۱. عدد ۱۲۶۰۰۰ دارای چند مقسوم علیه مربع کامل است؟

 : جواب عددی زوج است.

۲. برای تابع $f(x)$ می‌دانیم

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - \log_2(x+3), & x \geq 5 \\ f(x+1) - 4, & x < 5 \end{cases}$$

مقدار عددی $f(0)$ چند است؟



آزمون مرحله اول چهل و یکمین المپیاد

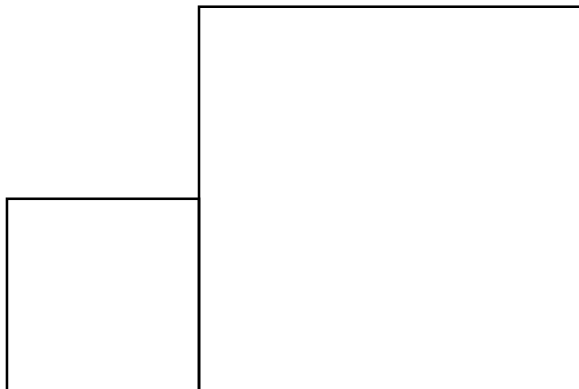
ریاضی کشور

۵				۶
	۶			
		۳		۲
	۴			

۳. در یک جدول 5×5 مانند شکل زیر تعدادی عدد قرار دارد. می‌خواهیم این جدول را با تعدادی مستطیل بپوشانیم به طوری که اضلاع آن‌ها منطبق بر خطوط عمودی و افقی جدول باشد. همچنین هر عدد دقیقا در یک مستطیل قرار گیرد و عدد درون هر مستطیل برابر با مساحت آن باشد. مستطیل‌ها می‌توانند هم‌پوشانی داشته باشند. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

🔊 : باقیمانده تقسیم جواب بر ۳ برابر ۱ است.

۴. مانند شکل زیر دو مربع با طول اضلاع ۴۰ و ۲۰ سانتیمتر در کنار هم رسم کرده‌ایم. میله‌ای به طول ۱۰ سانتیمتر را کاملا به رنگ آغشته کرده و در صفحه طوری حرکت می‌دهیم که دو سر میله در دو مربع مختلف باشد. اگر ضخامت میله را ناچیز در نظر بگیریم، با حرکت دادن میله حداکثر چند سانتیمتر مربع از دو مربع رنگی خواهد شد؟



(۱) $200 + 25\pi$

(۲) $300 + 25\pi$

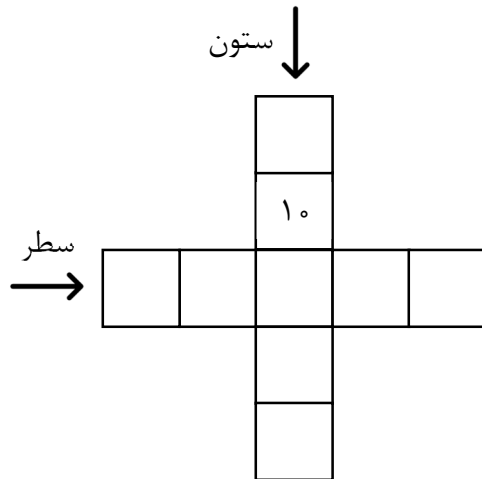
(۳) ۴۰۰

(۴) $400 + 25\pi$

(۵) ۵۰۰

😊 آزمون مرحله اول چهل و یکمین المپیاد ریاضی کشور

۵. مانند شکل زیر عدد ۱۰ در یکی از خانه‌ها نوشته شده است. می‌خواهیم همه اعداد ۲، ۳، ... و ۹ را در سایر خانه‌های شکل طوری بنویسیم که حاصل ضرب اعداد سطر برابر با حاصل ضرب اعداد ستون مشخص شده باشند. حاصل جمع اعداد ستون مشخص شده، می‌تواند برابر کدامیک از گزینه‌های زیر باشد؟



- (۱) ۲۷
- (۲) ۲۸
- (۳) ۲۹
- (۴) ۳۰
- (۵) ۳۱

۶. چند سه‌تایی مرتب (a, b, c) از اعداد حقیقی داریم که دوه‌دو متمایز باشند و داشته باشیم

$$a + [b] = b + [c] = c + [a]$$

توضیح: منظور از $[x]$ جزء صحیح عدد x است.

- (۱) صفر
- (۲) ۳
- (۳) ۶
- (۴) ۹
- (۵) بی‌نهایت

۷. به چند طریق می‌توان زیرمجموعه‌های A, B, C را از مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ انتخاب کرد

به طوری که داشته باشیم $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$

🔔 : رقم دهگان جواب ۹ است.

😊 آزمون مرحله اول چهل و یکمین المپیاد
ریاضی کشور

۸. دوایر W_1 و W_2 درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC بر یکدیگر مماس خارج اند. دایره W_1 بر اضلاع AC و BC و دایره W_2 بر اضلاع AB و BC مماس است. اگر شعاع W_1 و W_2 به ترتیب برابر ۳ و ۱ بوده و طول ضلع مثلث ABC به صورت \sqrt{n} باشد، مقدار n چقدر است؟

🔔 : جواب عددی طبیعی است.

۹. چند زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی داریم که $0 < x, y < 1$ و همچنین هر دو عدد $2x - y$ و $3x + 2y$ صحیح باشند؟

🔔 : جواب عددی یک رقمی است.

۱۰. هرگاه برای اعداد حقیقی a, b بدانیم $a > b > 1$ و $\log_b a + \log_a b = \frac{5}{2}$ و همچنین $a^b = b^a$ مقدار عددی $a + b$ چند است؟

🔔 : جواب عددی زوج است.

😊 آزمون مرحله اول چهل و یکمین المپیاد ریاضی کشور

۱۱. فاطمه می‌خواهد به صورت زیر با رسم کردن ۵ مربع به ضلع واحد در کنار هم، شکلی در صفحه بدست آورد. او ابتدا یک مربع رسم می‌کند. سپس در هر مرحله مربع جدید را طوری رسم می‌کند که اولاً بر هیچ‌یک از مربع‌های رسم شده منطبق نبوده و ثانیاً حداقل با یکی از آنها، حداقل یک ضلع مشترک داشته باشد. دو شکل را مختلف گوییم اگر نتوان آنها را با دوران و انتقال به هم تبدیل کرد. فاطمه در نهایت می‌تواند به چند شکل مختلف برسد؟

🔔 باقیمانده تقسیم جواب بر ۴ برابر ۲ است.

۱۲. نقطه P روی کمان BC از دایره محیطی هشت‌ضلعی منتظم $ABCDEFGH$ طوری انتخاب شده است که $PC = 1$ و $PE = 4\sqrt{2}$. طول شعاع دایره محیطی این هشت‌ضلعی منتظم کدام است؟

$$\frac{9\sqrt{2}}{2} \text{ (۵)} \quad \frac{7\sqrt{2}}{2} \text{ (۴)} \quad \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ (۳)} \quad \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (۲)} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (۱)}$$

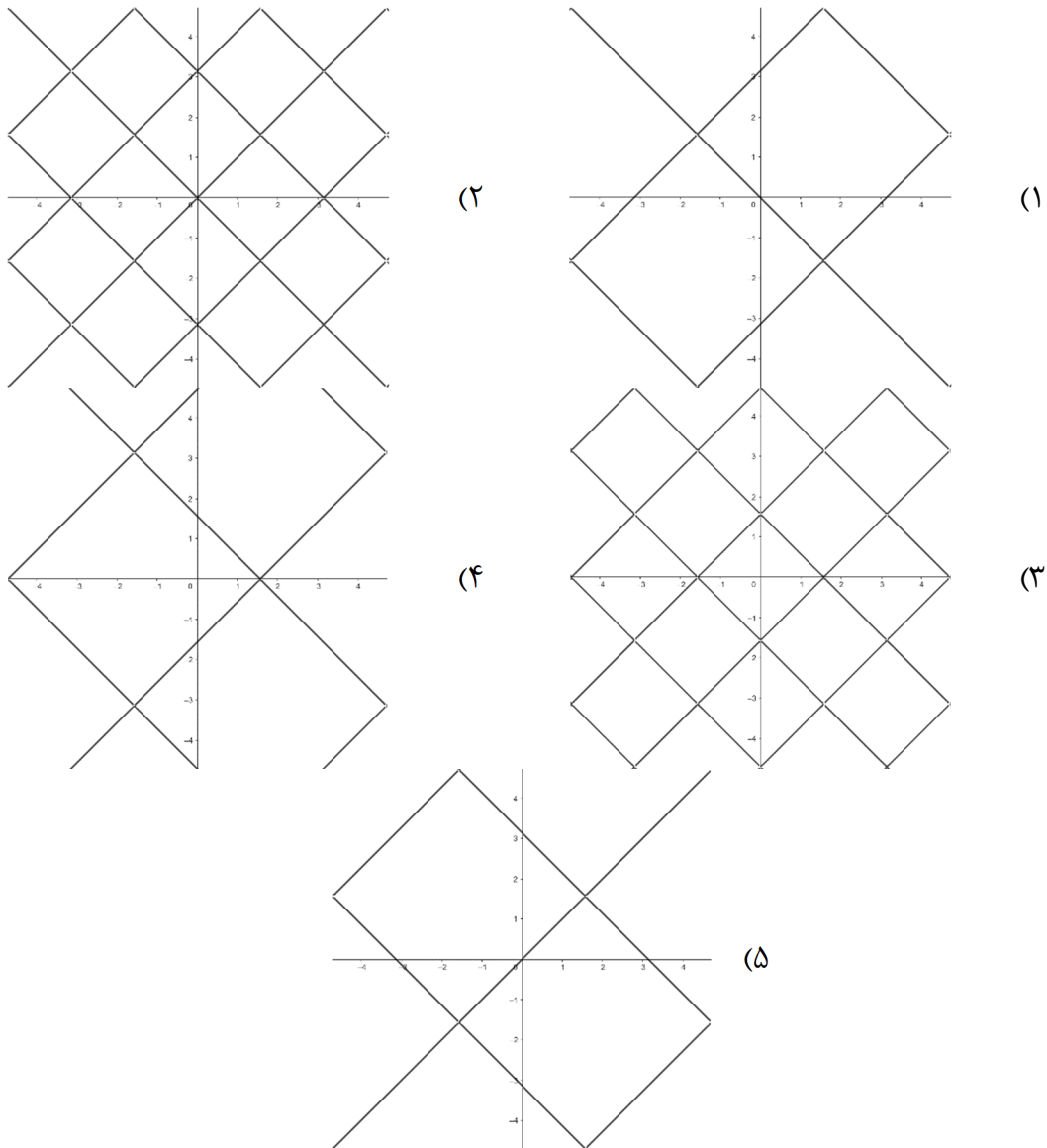
۱۳. چند سه‌تایی مرتب (x, y, z) از اعداد طبیعی وجود دارد که داشته باشیم

$$9(xy + yz + zx) = 8xyz$$

🔔 جواب بر ۳ بخشپذیر است.

☺
 آزمون مرحله اول چهل و یکمین المپیاد
 ریاضی کشور


۱۴. کدامیک از گزینه‌های زیر بخشی از نمودار معادله $\sin(x) = \sin(y)$ است؟



۱۵. می‌خواهیم دقیقاً ۷۵ درصد خانه‌های یک جدول ۸×۸ را سیاه کنیم طوری که اگر یک خانه به رنگ سیاه درآمده باشد، همه خانه‌های هم‌سطر یا همه خانه‌های هم‌ستون و یا هر دوی آن‌ها سیاه باشند. به چند روش می‌توانیم این کار را انجام دهیم.

- (۱) ۱۷۰۸ (۲) ۴۹۵۶ (۳) ۵۶۹۳ (۴) ۹۸۵۶ (۵) ۱۱۳۸۶

کد سؤالات: ۱


 آزمون مرحله اول چهل و یکمین المپیاد
 ریاضی کشور


۱۶. مربع $ABCD$ به ضلع ۳ مفروض است. دایره‌ای بر ضلع AB مماس بوده و امتداد CD از طرف C را در E و از طرف D را در F قطع کرده است. محل برخورد ضلع BC و دایره را K می‌نامیم. اگر $CE = ۲$ و $DF = ۱$ باشد، طول DK چند است؟

- (۱) $۳\sqrt{۲}$ (۲) $\sqrt{۱۷}$ (۳) ۴ (۴) $\sqrt{۱۵}$ (۵) $\sqrt{۱۳}$

۱۷. به زیرمجموعه چهار عضوی مانند $\{a, b, c, d\}$ از مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ عجیب می‌گوییم اگر بتوان اعضا را طوری مرتب کرد که حاصل $a - b + c - d$ بر ۷ بخشپذیر باشد. چند زیرمجموعه عجیب داریم؟

۱۸. تعریف می‌کنیم $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}$. برای چند عدد صحیح a نابرابری زیر برقرار است.
 $f(a - ۲) < f(۲a + ۱)$


۱۹. ۱۴۰۱ نفر در یک صف ایستاده‌اند. هر کسی یا دروغگو بوده و همیشه دروغ می‌گوید، یا راستگو بوده و همیشه راست می‌گوید. به ترتیب از همه افراد پرسیده‌ایم که چند نفر دروغگو در پشت سرش ایستاده است. مجموعه جواب‌های دریافتی $\{۰, ۱, ۲, \dots, ۱۴۰۰\}$ شده است. تعداد افراد دروغگو در صف چند عدد مختلف می‌تواند باشد؟


 آزمون مرحله اول چهل و یکمین المپیاد
 ریاضی کشور

۲۰. در هرم $OABCD$ با راس O ، قاعده $ABCD$ یک لوزی است. می‌دانیم $OA = OC = ۸$ و نیز $OB = OD = ۵$ است. اگر محیط قاعده هرم بزرگترین عدد طبیعی و زوج ممکن باشد، مساحت جانبی هرم کدام است؟

- (۱) $۲۰\sqrt{۱۱}$ (۲) $۲۲\sqrt{۱۱}$ (۳) $۲۴\sqrt{۱۱}$ (۴) $۲۶\sqrt{۱۱}$ (۵) $۲۸\sqrt{۱۱}$

۲۱. تعریف می‌کنیم $f(n) = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$. چند عدد طبیعی $n < ۱۰۰۰$ وجود دارد که برای هر کدام از آن‌ها $f(n)$ بر ۲۵ بخشپذیر باشد؟

 : جواب عددی زوج است.

۲۲. مجموعه $\{1, x, x^2, \dots, x^{10}\}$ چند زیرمجموعه ناتهی دارد به طوری که جمع اعضای آن چندجمله‌ای مانند $f(x)$ باشد که دقیقاً برای دو عدد صحیح و متمایز a, b داشته باشیم:

$$f(a) = f(b) = ۰$$



آزمون مرحله اول چهل و یکمین المپیاد

ریاضی کشور

۲۳. در بازی رومیزی "کمکارتا" سه نوع کارت شاپرک، حلزون و قورباغه داریم. از هر کدام از این انواع، ۱۰ کارت با شماره‌های ۱ تا ۱۰ موجود است. آرشم و آرتین می‌خواهند این بازی را انجام دهند. به هر کدام از آن‌ها به صورت تصادفی یک کارت از هر نوع داده می‌شود به طوری که هر کس فقط کارت‌های خود را ببیند. بازیکنی برنده می‌شود که جمع اعداد کارت‌هایش کمتر باشد. اگر آرشم کارت‌های حلزون با شماره ۱، شاپرک با شماره ۶ و قورباغه با شماره ۴ را داشته باشد، چقدر احتمال دارد برنده بازی شود؟

$$\frac{611}{729} \quad (5) \quad \frac{188}{243} \quad (4) \quad \frac{70}{81} \quad (3) \quad \frac{118}{729} \quad (2) \quad \frac{11}{81} \quad (1)$$

۲۴. می‌خواهیم دو دایره درون یک مربع به ضلع واحد قرار دهیم طوری که درون دایره‌ها با هم اشتراک نداشته ولی دایره‌ها می‌توانند نقطه‌های مرزی مشترک داشته باشند. همچنین دایره‌ها می‌توانند به اضلاع مربع مماس باشند. چندتا از گزاره‌های زیر درست اند؟
 گزاره ۱: همواره جمع محیط دو دایره کمتر از محیط مربع است.
 گزاره ۲: می‌توان دو دایره را طوری قرار داد که جمع محیط‌شان بیشتر از نصف محیط مربع شود.
 گزاره ۳: اگر دو دایره طوری باشند که جمع محیط‌شان بیشترین مقدار ممکن در بین حالت‌ها شود، حتما شعاع برابر دارند.
 گزاره ۴: اگر دو دایره طوری باشند که جمع محیط‌شان بیشترین مقدار ممکن در بین حالت‌ها شود، حتما مرکز هر دو دایره روی قطرهای مربع قرار گرفته است.

۲۵. در هر خانه از یک جدول 4×4 عددی طبیعی نوشته‌ایم. دو عدد را همسایه گوئیم اگر خانه‌های آن‌ها دقیقا در یک ضلع مشترک باشند. در این جدول هر عدد مقسوم علیه حاصل ضرب همسایه‌های خود است. حداکثر چند عدد اول متمایز در خانه‌ها وجود دارد؟

سعادتمند باشیید