



سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان

باسمه تعالی  
جمهوری اسلامی ایران  
وزارت آموزش و پرورش  
سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان  
معاونت دانش پژوهان جوان

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

دفترچه سؤالات مرحله اول

## سی و هشتمین دوره المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۸

صبح - ساعت: ۰۹:۰۰

کد دفترچه: ۱

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سؤالات	
	پاسخ کوتاه	پنج گزینه ای
۲۱۰	۱۶	۹

نام:

نام خانوادگی:

شماره صندلی:

### توضیحات مهم

#### استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

- ۱- کد دفترچه سؤالات شما ۱ است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه با مداد پر کنید. در غیر این صورت پاسخ نامه شما تصحیح نخواهد شد. توجه داشته باشید کد دفترچه سؤالات شما که در زیر هر یک از صفحه های این دفترچه نوشته شده است، با کد اصلی که در همین صفحه است، یکی باشد.
- ۲- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و وجود همه برگه های دفترچه سؤالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
- ۳- یک برگ پاسخ نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید. ضمناً مشخصات خواسته شده در بالای پاسخ نامه را با مداد مشکی بنویسید.
- ۴- برگه پاسخ نامه را دستگاه تصحیح می کند، پس آن را تا نکید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محل مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
- ۵- سؤالات به دو شکل پاسخ کوتاه و پنج گزینه ای هستند پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال پنج گزینه ای ۱ نمره منفی دارد. پاسخ نادرست به سوال های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد.
- ۶- همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ماشین حساب و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- ۷- شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان دهم و یازدهم انتخاب می شوند. به علاوه تعدادی از دانش آموزان دهمی، برای شرکت آزمایشی و کسب تجربه، برای شرکت در آزمون مرحله دوم پذیرفته خواهند شد.
- ۸- داوطلبان نمی توانند دفترچه سؤالات را با خود ببرند. (دفترچه باید همراه پاسخ نامه تحویل داده شود.)
- ۹- وبگاه کمیته علمی المپیاد ریاضی ایران [www.mathysc.ir](http://www.mathysc.ir) است.

کلیه حقوق این سؤالات برای سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان محفوظ است.

آدرس سایت اینترنتی: [www.ysc.sampad.medu.ir](http://www.ysc.sampad.medu.ir)

# آزمون مرحله اول سی و هشتمین المپیاد

## ریاضی کشور


دانش آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد. ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال، مشابه و شامل چهار ستون است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردن مشخص کنید.

سؤال ۱			
صحت	صحت	صحت	صحت
۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۲
۳	۳	۳	۳
۴	۴	۴	۴
۵	۵	۵	۵
۶	●	۶	۶
۷	۷	۷	۷
۸	۸	۸	۸
۹	۹	●	۹

جواب سؤال‌های پاسخ کوتاه، عددی نامنفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵٫۷۳ بود، شما باید از قسمت اعشاری صرف‌نظر کرده و در پاسخ‌نامه، مانند شکل روبه‌رو، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید.

در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای، شماره گزینه درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.

ضمناً امسال در انتهای برخی از سوالات پاسخ کوتاه بخشی

به عنوان اطمینان از پاسخ قرار داده شده است، که با علامت  نمایش داده خواهد شد. این بخش یک خاصیتی از جواب را مطرح کرده و صرفاً برای جلوگیری از خطاهای محاسباتی احتمالی بوده و به‌روند حل هیچ کمکی نخواهد کرد.

۰. (سؤال شماره صفر) کد دفترچه شما چند است؟ آن را در صفحه اول پاسخ‌نامه خود مشخص کنید. مشخص نکردن این کد، عواقب ناگواری دارد که روی جلد پاسخ‌نامه توضیح داده شده است.

۱. چند عدد طبیعی حداکثر شش رقمی با ارقام ۰ و ۱ وجود دارد که مضرب ۱۱ باشد؟

۱۹ (۵)

۱۸ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

محل انجام محاسبات:

کد سوالات: ۱



# آزمون مرحله اول سی و هشتمین المپیاد

## ریاضی کشور

۲. تعداد جواب‌های صحیح معادله زیر را بیابید.

$$(x^2 + 5x + 5)^{(x^2 - 10x + 21)} = 1$$

📢: جواب عددی اول است.

۳.  $ABCD$  مربعی به ضلع  $\sqrt{2}$  است. دایره  $t$  به شعاع ۲ که مرکز آن (نقطه  $O$ ) روی خط  $CD$  قرار دارد (بین  $C$  و  $O$  است) از راس  $D$  مربع گذشته است.  $k$  دایره‌ای گذرا از راس  $A$  می‌باشد که مرکز آن، روی امتداد پاره‌خط  $CA$  از طرف  $A$  قرار دارد و در نقطه  $P$  بر دایره  $t$  مماس شده است، به طوری که نقاط  $P$ ،  $A$  و  $B$  در یک طرف خط  $CD$  قرار دارند. شعاع دایره  $k$  چقدر است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ ( $\sqrt{2}$ )      ۴ ( $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ )      ۵ ( $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ )

۴. مدرسه‌ای در شکرستان، ۱۲ دانش‌آموز دارد. برخی از این دانش‌آموزان با هم تعدادی انجمن تشکیل داده‌اند. می‌دانیم یک شخص می‌تواند در بیش از یک انجمن عضویت داشته باشد. برخی از انجمن‌ها ۳ عضوی، و بقیه انجمن‌ها ۴ عضوی هستند. می‌دانیم که هر دو دانش‌آموزی، دقیقاً در یکی از این انجمن‌ها، با هم عضو هستند. اگر تعداد انجمن‌های این مدرسه، ۱۳ تا باشد، چند تا از این انجمن‌ها ۳ عضوی هستند؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)      ۵ (۵)

۵. عدد طبیعی  $a$  را «جالب» می‌نامیم هرگاه اعداد طبیعی  $x, y$  (نه لزوماً متمایز) وجود داشته باشند

که  $a = x^2 y^2$ . عدد  $9!$  چند مقسوم علیه جالب دارد؟

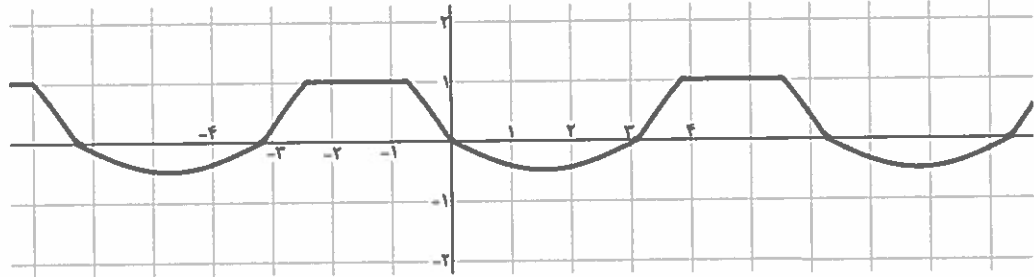
📢: مجموع ارقام جواب بر ۱۰ بخش پذیر است.

محل انجام محاسبات:

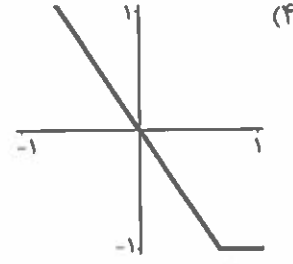
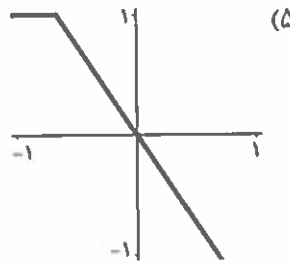
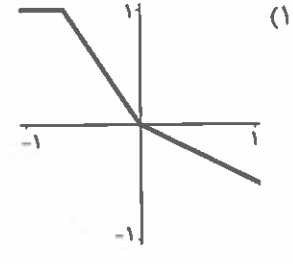
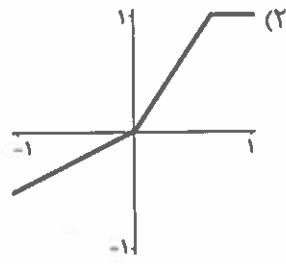
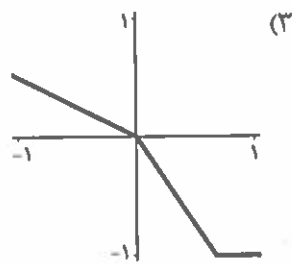
کد سؤالات: ۱

😊 آزمون مرحله اول سی و هشتمین المپیاد  
ریاضی کشور

۶. برای تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  می‌دانیم نمودار  $f(\sin(x))$  به شکل زیر است.



کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند بخشی از نمودار تابع  $f(x)$  باشد.



۷. در متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  زاویه  $BAD$  حاده است. نیمساز زاویه  $BAD$  پاره خط  $DC$  را در  $E$  قطع می‌کند. اگر  $ABED$  یک چهارضلعی محاطی باشد و دایره محیطی آن بر ضلع  $BC$  مماس شود، اندازه زاویه  $AED$  چند درجه است؟

📣 : جواب عددی طبیعی و بر ۴ بخش پذیر است.

کد سوالات: ۱

# آزمون مرحله اول سی و هشتمین المپیاد

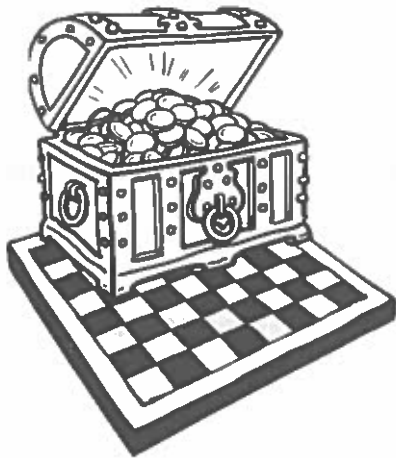


## ریاضی کشور

۸. علی اعداد ۱ تا ۱۳۹۸ را به ترتیب دلخواه خود در یک ردیف می‌نویسد. وی در هر مرحله دو عدد متوالی را پاک کرده و بین آن‌ها اختلافشان را می‌نویسد. مشخص است که پس از ۱۳۹۷ مرحله تنها یک عدد بر روی تخته باقی می‌ماند. این عدد حداکثر برابر چند می‌تواند باشد؟

۹. یک عدد طبیعی سه رقمی را «منظم» می‌نامیم هرگاه اولاً از سه رقم متمایز و ناصفر تشکیل شده باشد و ثانیاً با در نظر گرفتن هر دو رقم متوالی‌اش، رقم سمت راستی بر رقم سمت چپی بخش‌پذیر باشد. به عنوان مثال عدد ۱۲۶ یک عدد منظم است. چند عدد منظم سه‌رقمی وجود دارد؟

📡: باقی‌مانده تقسیم جواب بر ۴ برابر ۳ است.



۱۰. پادشاه شهر فلک‌الافلاک می‌خواهد به مخترع بازی شطرنج به دلخواه او جایزه دهد. مخترع از پادشاه می‌خواهد در هر خانه سیاه که در سطر و ستون  $i$  ام و  $j$  ام واقع است، تعداد  $i \times j$  سکه نقره قرار دهد، و در انتها جمع سکه‌ها جایزه او شود. با توجه به اینکه صفحه شطرنج  $8 \times 8$  بوده و خانه واقع در سطر و ستون ۱ ام سیاه است، جایزه مخترع شطرنج چند سکه نقره می‌شود.

📡: جواب دو رقم یکسان دارد.

۱۱. نقطه  $G$  مرکز ثقل مثلث  $ABC$  (محل برخورد میانه‌های مثلث) است. از  $G$  خطی به موازات  $AB$  رسم می‌کنیم تا ضلع  $BC$  را در  $K$  قطع کند. نقطه  $M$  وسط ضلع  $AB$  است و محل برخورد خطوط  $AK$  و  $CM$  را  $F$  می‌نامیم. اگر مساحت مثلث  $KFM$  برابر با سه سانتی‌متر مربع باشد، مساحت مثلث  $ABC$  چند سانتی‌متر مربع است؟

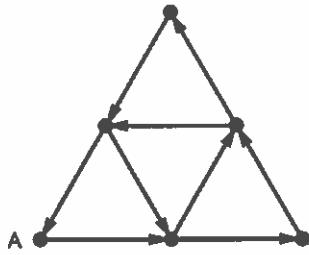
محل انجام محاسبات:

کد سوالات: ۱



# آزمون مرحله اول سی و هشتمین المپیاد

## ریاضی کشور



۱۲. شهر مصلس‌ها از تعدادی میدان و خیابان‌های یک‌طرفه به شکل روبه‌رو تشکیل شده است. جهت هر یک از خیابان‌های این شهر مطابق جهت مشخص شده بر روی شکل است. برای طی کردن هر کدام از این خیابان‌ها، یک لیتر بنزین لازم است. سپهر می‌خواهد با ماشین شخصی خود که ۹ لیتر بنزین دارد در خیابان‌های این شهر با شروع از  $A$  به گردش بپردازد. وی به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟ (در طول مسیر ممکن است از شهر و یا خیابان تکراری گذر کند).  
 ☞ اختلاف رقم دهگان و یکان جواب کمتر و یا مساوی ۱ است.

۱۳. تعداد سه‌تایی‌های مرتب  $x, y, z$  از اعداد صحیح  $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1000$  را بیابید به طوری که عدد طبیعی  $n$  موجود باشد که

$$(x + y + z)(x + 1)(y + 1)(z + 1) = 3^n$$

۱۲ (۵)

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

۱۴. ضریب  $x^{60}$  در چندجمله‌ای زیر چند است؟

$$(x - 1)(x^2 - 1)(x^3 - 1) \dots (x^{15} - 1)$$

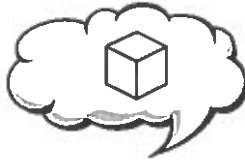
محل انجام محاسبات:

کد سؤالات: ۱

# آزمون مرحله اول سی و هشتمین المپیاد



## ریاضی کشور



۱۵. لانه مورچه‌ای در وسط یکی از یال‌های مکعبی به ضلع واحد قرار دارد. وسط هر کدام از یال‌های دیگر مکعب (به غیر از مکان لانه) تکه‌ای نان قرار دارد. اگر مورچه بخواهد با حرکت روی سطح جانبی مکعب، همه نان‌ها را برداشته و در نهایت به لانه خود بازگردد، طول کوتاه‌ترین مسیری که با انجام این فرآیند طی می‌کند، چقدر است؟

(۱)  $2 + 5\sqrt{2}$  (۲)  $6\sqrt{2}$  (۳)  $12\sqrt{2}$  (۴)  $1 + 4\sqrt{2}$  (۵) ۱۲

۱۶. ۱۲ لامپ و ۱۲ کلید با شماره ۱ تا ۱۲ داریم. با زدن کلید شماره  $k$ ، همه لامپ‌هایی که شماره آن‌ها کمتر یا مساوی  $k$  است، تغییر وضعیت می‌دهند. در ابتدا تمامی لامپ‌ها خاموش هستند. به چند طریق می‌توان زیر مجموعه‌ای ۷ عضوی از کلیدها را انتخاب کرد، به طوری که با زدن آن‌ها دقیقاً ۷ لامپ روشن شود؟

📢 : جواب دو رقم یکسان دارد.

۱۷. تعداد زیرمجموعه‌های چهار عضوی از مجموعه اعداد حقیقی را بیابید که هرطور آن‌ها را به دو دسته دو عضوی افراز کنیم، حاصل ضرب اعضای یک دسته با حاصل جمع اعضای دسته دیگر برابر باشد.

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۲۴ (۵) بی‌نهایت

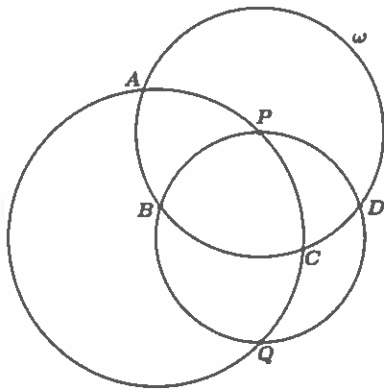
محل انجام محاسبات:

کد سؤالات: ۱

# آزمون مرحله اول سی و هشتمین المپیاد

## ریاضی کشور

۱۸. آلیس در سرزمین عجایب توسط ریاضی دانی بدجنس در کلاسی زندانی شده است. آلیس باید به مدت یک هفته روی یک معمای ریاضی کار کند و در انتها جواب را به ریاضی دان بگوید و تنها در صورتی آزاد می شود که پاسخ او درست باشد. کلاس بزرگی که آلیس در آن محبوس شده تخته بسیار بزرگی دارد که در ابتدا روی آن اعداد  $۱, ۲, ۳, ۴, \dots, ۱۰۰۰$  به ترتیب نوشته شده است. آلیس باید در روز  $i$  ام عدد  $i$  ام نوشته شده روی تخته مانند  $a$  را در نظر بگیرد، سپس هر عدد روی تخته مانند  $b$  را بر م.م.ب آن عدد و  $a$  تقسیم کرده و حاصل را به جای  $b$  روی تخته بنویسد (مثلاً در انتهای روز اول اعداد تخته به صورت  $۱, ۳, ۲, ۵, ۳, \dots, ۹۹۹, ۵۰۰$  در می آیند). جواب معما تعداد یک‌های نوشته شده روی تخته در انتهای روز هفتم است. (مثلاً در انتهای روز اول یک عدد ۱ روی تخته وجود دارد). اگر شما پیش آلیس بودید آیا می توانستید به سرعت جواب نهایی را محاسبه کرده و آلیس را نجات دهید؟ اگر چنین است جواب را در پاسخ نامه وارد نمایید.



۱۹. در شکل مقابل، دو دایره در نقاط  $P$  و  $Q$  متقاطع هستند. دایره  $W$  به مرکز  $P$  می باشد که دو دایره دیگر را در نقاط  $A, B, C, D$  قطع می کند. اگر زاویه  $BQC$  برابر با  $۵۰$  درجه و زاویه  $CQD$  برابر با  $۲۰$  درجه باشد، اندازه زاویه  $ADC$  چند درجه است؟ (شکل دقیق نیست).  
 جواب عددی طبیعی و باقی مانده تقسیم آن بر ۴ برابر ۳ است.

محل انجام محاسبات:

کد سؤالات: ۱



# آزمون مرحله اول سی و هشتمین المپیاد

## ریاضی کشور

۲۰. امید بر روی راس‌های یک ۱۳۹۸ ضلعی منتظم اعداد ۱۰۰ و ۱- را نوشته است (ممکن است از برخی از این اعداد استفاده نشود). به طوری که عدد هر کدام از راس‌ها میانگین عدد دو راس مجاور، یا مجموع عدد دو راس مجاور آن است (ممکن است برخی از راس‌ها میانگین، و برخی دیگر مجموع دو راس مجاور آن باشند). مجموع اعداد همه راس‌های این ۱۳۹۸ ضلعی چند حالت مختلف، می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱۳۹۵ (۲) ۱۳۹۷ (۳) ۱۳۹۹ (۴) ۲۷۹۵ (۵) ۲۷۹۷

۲۱. تعداد اعداد طبیعی سه رقمی را بیابید که دو رقم سمت راست مربعشان با دو رقم سمت راست خودشان نظیر به نظیر برابر باشد. (مانند ۲۲۵ که دو رقم سمت راستش با دو رقم سمت راست  $۲۲۵^2 = ۵۰۶۲۵$  برابر است).

۲۲. برای عدد حقیقی  $x$ ، کم‌ترین مقدار عبارت زیر چند است؟

$$\sqrt{x^2 + 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 6x + 10}$$

- (۱)  $2 + \sqrt{5}$  (۲)  $4\sqrt{2}$  (۳)  $\sqrt{24}$  (۴)  $\sqrt{5} + \sqrt{13}$  (۵)  $\sqrt{8} + \sqrt{10}$

محل انجام محاسبات:

کد سؤالات: ۱

# آزمون مرحله اول سی و هشتمین المپیاد



## ریاضی کشور

۲۳. دایره  $\omega_1$  به مرکز  $O$  مفروض است. وتر  $AB$  از دایره  $\omega_1$  به گونه‌ای انتخاب شده که دایره  $\omega_2$  به قطر  $AB$ ، از  $O$  بگذرد. نقطه  $C$  روی خط  $AB$  طوری قرار دارد که زاویه  $BCO$  برابر با  $30^\circ$  درجه است (  $B$  بین نقاط  $A$  و  $C$  قرار دارد). پاره‌خط  $OC$  دایره  $\omega_2$  را برای بار دوم در  $K$  قطع کرده است. نقطه  $D$  روی دایره  $\omega_1$  قرار دارد به گونه‌ای که  $CD$  بر دایره  $\omega_1$  مماس است و نقاط  $D$  و  $O$  در یک طرف خط  $AB$  قرار دارند. اگر طول پاره‌خط  $DK$  برابر با  $3\sqrt{2}$  باشد، طول پاره‌خط  $CD$  چقدر است؟

۲۴. در هر یک از خانه‌های یک جدول  $3 \times 4$  یک نفر نشسته است. هر کدام از این افراد یا راستگو است و همیشه راست می‌گوید و یا دروغگو است که همیشه دروغ می‌گوید. در یک لحظه هر کدام از این ۱۲ نفر گفتند: « تعداد افراد راستگو در سطر من با تعداد افراد راستگو در ستون من برابر است. » حداکثر چند نفر از این افراد می‌توانند دروغگو باشند؟

۲۵. دستگاه زیر چند دسته جواب حقیقی دارد؟

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a^2 = bc(1 + a) \\ b^2 = ac(1 + b) \\ c^2 = ab(1 + c) \end{cases}$$

ساعات متناوباً