



باسمه تعالی  
جمهوری اسلامی ایران  
وزارت آموزش و پرورش  
سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان  
معاونت دانش پژوهان جوان



مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

دفترچه سؤالات مرحله اول سال ۱۳۹۹

# سی و نهمین دوره المپیاد ریاضی

صبح - ساعت: ۰۹:۰۰

## کد دفترچه: ۱

تعداد سؤالات	مدت آزمون (دقیقه)
۱۶	۱۲۰

نام: \_\_\_\_\_ نام خانوادگی: \_\_\_\_\_ شماره صندلی: \_\_\_\_\_

استفاده از هر نوع ماشین حساب ممنوع است.

توضیحات مهم

- کد دفترچه سؤالات شما ۱ است. این کد را در محلّ مربوط روی پاسخ نامه با مداد پر کنید. در غیر این صورت پاسخ نامه شما تصحیح نخواهد شد. توجه داشته باشید کد دفترچه سؤالات شما که در زیر هر یک از صفحه های این دفترچه نوشته شده است، با کد اصلی که در همین صفحه است، یکی باشد.
- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و وجود همه برگه های دفترچه سؤالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هرگونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسؤول جلسه را مطلع کنید.
- یک برگ پاسخ نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسؤول جلسه را مطلع کنید. ضمناً مشخصات خواسته شده در بالای پاسخ نامه را با مداد مشکی بنویسید.
- برگه پاسخ نامه را دستگاه تصحیح می کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محلّ مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
- سؤالات به دو شکل پاسخ کوتاه و پنج گزینه ای هستند پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال پنج گزینه ای ۱ نمره منفی دارد. پاسخ نادرست به سوال های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد.
- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلّب محسوب خواهد شد.
- شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان دهم و یازدهم انتخاب می شوند. به علاوه تعدادی از دانش آموزان دهمی، برای شرکت آزمایشی و کسب تجربه، برای شرکت در آزمون مرحله دوم پذیرفته خواهند شد.
- داوطلبان نمی توانند دفترچه سؤالات را با خود ببرند. (دفترچه باید همراه پاسخ نامه تحویل داده شود).
- وبگاه کمیته علمی المپیاد ریاضی ایران [www.mathysc.ir](http://www.mathysc.ir) است.
- در صورتی که به هر دلیل مثل قطعی برق و خرابی دستگاه تکثیر و... آزمون با تأخیر شروع شد به همان اندازه، شما وقت اضافه خواهید داشت.

کلیه حقوق این سؤالات برای سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان محفوظ است.

آدرس سایت اینترنتی: [www.ysc-sampad.medu.ir](http://www.ysc-sampad.medu.ir)



# آزمون مرحله اول سی و نهمین المپیاد

## ریاضی کشور


دانش‌آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد. ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال، مشابه و شامل چهار ستون است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردن مشخص کنید.

سؤال ۱			
هزارگان	صدگان	دهگان	یکان
۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۲
۳	۳	۳	۳
۴	۴	۴	۴
۵	۵	۵	۵
۶	●	۶	●
۷	۷	۷	۷
۸	۸	۸	۸
۹	۹	●	۹


جواب سؤال‌های پاسخ کوتاه، عددی نامنفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵٫۷۳ بود، شما باید از قسمت اعشاری صرف‌نظر کرده و در پاسخ‌نامه، مانند شکل روبه‌رو، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید.

در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای، شماره گزینه درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.

همچنین در انتهای برخی از سوالات پاسخ کوتاه بخشی

به عنوان اطمینان از پاسخ قرار داده شده است، که با علامت  نمایش داده خواهد شد. این بخش یک خاصیتی از جواب را مطرح کرده و صرفاً برای جلوگیری از خطاهای محاسباتی احتمالی است.


۱. دو عدد طبیعی را زوج خوش‌بخت گوییم هرگاه تعداد ارقام آن‌ها برابر و ترتیب ارقام آن‌ها کاملاً عکس یکدیگر باشد (مثلاً ۲۳۱ و ۱۳۲ زوج خوش‌بخت است). چند زوج خوش‌بخت سه‌رقمی وجود دارد که اختلاف آن‌ها ۷ برابر عددی طبیعی است؟

 : باقیمانده تقسیم جواب بر ۸ برابر ۴ است.

۲. معادله زیر چند جواب در اعداد حقیقی مثبت دارد؟

$$x^{[x]} = x + [x]$$

توضیح: منظور از  $[x]$  جزء صحیح عدد  $x$  است.

 : جواب عددی فرد است.



# آزمون مرحله اول سی و نهمین المپیاد

## ریاضی کشور

۳. در مستطیل  $ABCD$  می‌دانیم  $AB = 3$  و  $BC = 2$  است. دایره‌ای به اضلاع  $AB$ ،  $BC$  و  $CD$  مماس است. از نقطه  $D$  مماسی غیر از ضلع  $CD$  بر دایره رسم می‌کنیم تا  $AB$  را در نقطه  $P$  قطع کند. طول  $DP$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{9}{4}$       (۲)  $1 + \sqrt{2}$       (۳)  $2\sqrt{2}$       (۴)  $\sqrt{10} - 1$       (۵)  $\frac{5}{2}$

۴. خانه‌های یک جدول  $6 \times 6$  همانند شکل زیر با ۴ رنگ رنگامیزی شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۶ خانه از این جدول را انتخاب کرد بطوری که ۳ تا از آن‌ها از یک رنگ و ۳ تا از رنگ دیگری باشند و در ضمن هیچ دوتا در یک سطر یا ستون قرار نداشته باشند؟

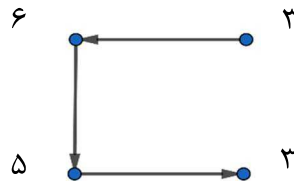
۱	۲	۱	۲	۱	۲
۳	۴	۳	۴	۳	۴
۱	۲	۱	۲	۱	۲
۳	۴	۳	۴	۳	۴
۱	۲	۱	۲	۱	۲
۳	۴	۳	۴	۳	۴



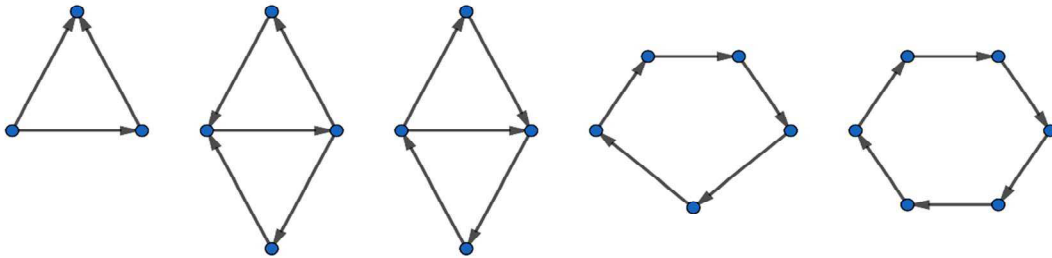
# آزمون مرحله اول سی و نهمین المپیاد

## ریاضی کشور

۵. می‌خواهیم برای اشکالی مانند شکل زیر، روی هر یک از رئوس شکل، اعدادی بین  $1, 2, \dots, 6$  را بنویسیم طوری که برای هر پیکان که از رأس با عدد  $x$  خارج و به رأس با عدد  $y$  وارد شده باشد،  $5x + y$  مضرب ۷ باشد. مانند اعدادی که روی رئوس شکل زیر است:



مثلا در بالاترین پیکان  $21 = 6 + 3 \times 5$  مضرب ۷ است. در چند شکل از اشکال زیر می‌توان این کار را انجام داد؟



۶. چند چهارتایی مرتب  $(a, b, c, d)$  از اعداد صحیح در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کنند؟

$$a + b = c^2 + d^2, c + d = a^2 + b^2$$

(۵) بی‌نهایت

(۴) ۱۰

(۳) ۸

(۲) ۶

(۱) ۴

۷. مساحت چندضلعی‌ای که طول همه اضلاع آن برابر یک سانتی‌متر است و زوایای داخلی آن به صورت یکی در میان برابر ۹۰ و ۲۲۵ درجه است، چند سانتی‌متر مربع است؟

(۵) ۱۶

(۴)  $6 + 6\sqrt{2}$

(۳)  $8 + 4\sqrt{2}$

(۲)  $6 + 4\sqrt{2}$

(۱)  $8 + 2\sqrt{2}$



# آزمون مرحله اول سی و نهمین المپیاد

## ریاضی کشور



۸. در یک کیسه ۶ توپ قرمز و ۴ توپ آبی وجود دارد. مهدیار در ابتدا با یک چشم‌بند، چشم‌های خود را به‌طور کامل می‌بندد. سپس در گام اول یکی از توپ‌ها را از کیسه به بیرون می‌اندازد. در گام دوم ۵ توپ را از کیسه خارج کرده و به کیسه دوم منتقل می‌کند. در گام سوم یک توپ را از کیسه دوم به بیرون می‌اندازد. در گام چهارم از کیسه دوم ۲ توپ خارج کرده و به کیسه سوم منتقل می‌کند. سپس یک توپ را از کیسه سوم خارج می‌کند. احتمال اینکه توپ خارج شده قرمز باشد، کدام است؟

$$\frac{4}{5} \text{ (۵)}$$

$$\frac{3}{4} \text{ (۴)}$$

$$\frac{3}{5} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۲)}$$

$$\frac{2}{5} \text{ (۱)}$$

۹. مجموع ارقام یک عدد طبیعی برابر ۱۸ است. کدام یک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی این عدد باشد؟

$$۳۶ \text{ (۵)}$$

$$۲۴ \text{ (۴)}$$

$$۸ \text{ (۳)}$$

$$۶ \text{ (۲)}$$

$$۵ \text{ (۱)}$$

۱۰. علی و رضا هر کدام یک دنباله حسابی ۳ جمله‌ای از اعداد حقیقی و مثبت انتخاب کرده و روی برگه خود، از چپ به راست می‌نویسند. سپس هر دو برگه‌ها را کنار هم قرار داده و جملات دنباله‌ها را نظیر به نظیر باهم مقایسه می‌کنند و نتیجه را به صورت دنباله‌ای از حروف "ب"، "ک" و "م" روی تخته، از چپ به راست می‌نویسند. اینگونه که اگر جمله  $n$ ام دنباله علی از جمله  $n$ ام دنباله رضا بزرگتر بود حرف "ب"، اگر کوچکتر بود حرف "ک" و اگر مساوی بود حرف "م" را به عنوان جمله  $n$ ام دنباله نتیجه، روی تخته می‌نویسند. به عنوان مثال اگر دنباله علی ۲۳۴ و دنباله رضا ۱۴۷ باشد، دنباله نتیجه ک ک ب خواهد بود. چه تعداد از دنباله‌های حروف زیر نمی‌تواند به عنوان نتیجه روی تخته نوشته شده باشد؟

ک م ب

م ب م

ک ک م

ب ک م

ب ب ک

ک ب ب

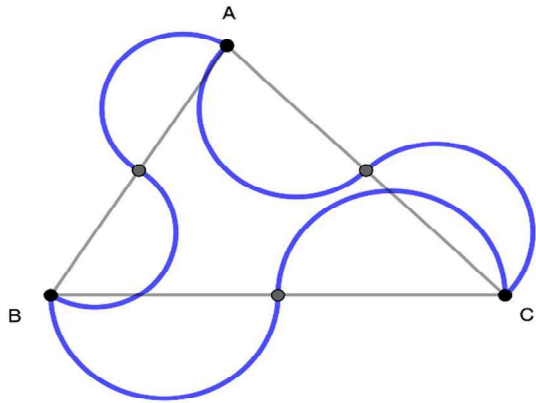
ک م ک

م ب ک



# آزمون مرحله اول سی و نهمین المپیاد

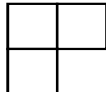
## ریاضی کشور



۱۱. می‌خواهیم مساحت برکه دوستی را محاسبه کنیم. محیط برکه دوستی، مانند شکل، از شش نیم‌دایره تشکیل شده که از رئوس و اواسط اضلاع مثلث  $ABC$  عبور می‌کند. اگر طول اضلاع مثلث  $ABC$  برابر ۵۰، ۶۰ و ۷۰ متر باشد، مساحت برکه دوستی چند متر مربع است؟

- (۱) ۱۵۰۰      (۲) ۳۰۰۰      (۳)  $۳۰۰\sqrt{۶}$       (۴)  $۶۰۰\sqrt{۶}$       (۵)  $۳۶۰\pi$

۱۲. به چند طریق می‌توان ۶ خانه از یک جدول  $۳ \times ۵$  را حذف کرد بطوری که در خانه‌های باقیمانده

شکلی مانند  و دوران‌های آن، یافت نشود؟

- (۱) ۱۰      (۲) ۱۲      (۳) ۱۶      (۴) ۲۰      (۵) ۲۲

۱۳.  $n$  عددی طبیعی است. می‌دانیم  $n$  دارای حداقل سه مقسوم‌علیه مثبت است و همچنین اگر  $d_1 < d_2 < \dots < d_k$  مقسوم‌علیه‌های آن باشند، داریم  $d_{k-1} - d_{k-2} = ۱۳۹۹$ . بزرگترین مقدار ممکن برای  $n$  چند است؟

📢: رقم دهگان جواب برابر ۹ است.


۱۴. چند زوج مرتب  $(x, y)$  از اعداد حقیقی در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کنند؟

$$\begin{cases} 2y^2 + 2y + 4x = x^2 + xy + 4 \\ y^2 + 2x^2 + 2y = 5x + 3xy + 3 \end{cases}$$




# آزمون مرحله اول سی و نهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۵. دایره  $W_1$  به مرکز  $O$  و شعاع ۴ سانتی‌متر بر دایره  $W_2$  در نقطه  $S$  مماس داخل است. وتر  $AB$  از دایره  $W_2$  در نقطه  $M$  بر  $W_1$  مماس است. می‌دانیم مثلث  $OAB$  متساوی‌الساقین است. اگر زاویه  $AOB$  برابر  $120^\circ$  درجه باشد، شعاع دایره  $W_2$  چند سانتی‌متر است؟

 : جواب عددی طبیعی است.

۱۶. می‌خواهیم تعدادی زیرمجموعه ۱۰ عضوی از مجموعه  $S = \{1, 2, \dots, 100\}$  انتخاب کنیم بگونه‌ای که بتوانیم با شروع از این مجموعه‌های انتخاب شده و اعمال اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها به هر زیرمجموعه دلخواه از  $S$  برسیم. حداقل چند زیرمجموعه باید انتخاب کنیم؟

 : جواب مضرب ۴ است.

سازمان سنجش و اندازه‌گیری

